



**HAL**  
open science

# Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre. Cas de développement et de réduction en algèbre

Marie-Caroline Croset

► **To cite this version:**

Marie-Caroline Croset. Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre. Cas de développement et de réduction en algèbre. 2005. hal-00190164

**HAL Id: hal-00190164**

**<https://telearn.hal.science/hal-00190164v1>**

Submitted on 23 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Marie-Caroline Croset

MÉMOIRE DE MASTER 2 RECHERCHE  
ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES  
D'APPRENTISSAGE HUMAIN  
ET DIDACTIQUE

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

# **Modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre. Cas de développement et de réduction en algèbre**

**Encadrants :**

Hamid Chaachoua  
Jean-François Nicaud

***Membres du Jury :***

Nicolas Balacheff  
Cyrille Desmoulins  
Vanda Luengo

Mémoire soutenu le 24 Juin 2005

## Table des matières

INTRODUCTION.....	5
I. LES REGLES DU CALCUL LITTERAL.....	5
1.1 Le symbolisme algébrique dans l'histoire.....	6
1.2 Les tâches de développement et réduction dans le secondaire français.....	6
1.2.1 Leur place dans les programmes actuels.....	6
1.2.2 Etude des manuels.....	8
1.2.3 Point de vue adopté.....	11
1.3 Difficultés rencontrées par les élèves en calcul littéral.....	11
1.3.1 Rupture dans l'évolution des programmes de l'enseignement.....	12
1.3.2 Ruptures des statuts.....	13
1.3.2.1 Le statut des lettres.....	13
1.3.2.2 Procédural ou structural ?.....	14
1.3.2.3 Sémantique ou syntaxique ?.....	15
1.4 Première conclusion.....	16
1.5 Le calcul littéral en informatique.....	16
1.5.1 Modélisation informatique.....	17
1.5.2 Le projet Aplusix.....	17
1.5.2.1 Présentation du logiciel.....	18
1.5.2.2 Exemples de représentations.....	19
1.6 Deuxième conclusion.....	22
II. MODELISATION DE L'APPRENANT.....	23
2.1 Modélisation didactique.....	23
2.1.1 Trois courants.....	23
2.1.2 Qu'entendons nous par erreur ?.....	24
2.1.3 Comment tenir compte des autres erreurs ? Comment les modéliser ?.....	25
2.2 Modélisation informatique de l'apprenant.....	26
2.2.1 Les grands courants.....	26
2.2.2 le diagnostic, comme réponse à notre demande de modélisation de l'apprenant.....	27
2.3 Troisième conclusion.....	29
2.4 Au sein d'Aplusix.....	29
2.4.1 Le magnétoscope.....	30
2.4.2 Anais.....	31
2.4.2.1 Les règles.....	31
2.4.2.2 L'algorithme de diagnostic automatique.....	33
2.5 Quatrième conclusion.....	35
III. DIAGNOSTIC D'ERREURS EN CALCUL LITTERAL.....	36
3.1 Présentation des protocoles.....	36
3.2 Quelques précautions.....	36
3.3 Méthodologie.....	37
3.3.1 Analyse de protocoles individuels ; (A).....	38
3.3.2 Spirale de mise en oeuvre : du codage à un diagnostic correct ; (B & C).....	40
3.3.3 Cinquième conclusion.....	42

3.4 Traitement des problèmes soulevés.....	43
3.5 Réponses aux question6 a & question6 b.....	45
3.5.1 Les résultats.....	45
3.5.2 Les règles de Paris VIII.....	47
3.6 Sixième conclusion.....	48
IV. VERS LA CONSTRUCTION D'UN DIAGNOSTIC DE CONCEPTIONS D'ÉLÈVES...48	
4.1 Fréquence des erreurs.....	48
4.2 Première approche : à la recherche de conceptions.....	49
4.2.1 Structure des règles.....	50
4.2.2 Vecteur de comportement.....	50
4.3 Seconde approche : trois notions fondatrices.....	53
4.3.1 Les puissances.....	53
4.3.2 Les parenthèses.....	56
4.3.3 Le signe moins.....	57
4.4 Septième conclusion.....	58
V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	59

## **INTRODUCTION**

Analyser les comportements d'élèves, afin de tenter de cerner leurs connaissances, est une pierre d'angle de la didactique. Habituellement établie sur des productions écrites, l'étude des processus de raisonnement d'apprenants est souvent manuelle et individuelle, travail lent, fastidieux et ne pouvant concerner que des effectifs restreints. Aussi, automatiser cette analyse apporterait une aide considérable tant au didacticien qu'à l'enseignant ou à tout autre chercheur dont l'apprentissage serait au cœur de son étude.

C'est dans ce cadre de recherche de détermination automatique de conceptions d'élèves que se place le projet Aplusix : environnement informatique dans le domaine de l'algèbre, ce logiciel offre la possibilité de recueillir les enregistrements des actions d'élèves. L'historique de ces actions constituera notre corpus de données initial afin de tenter de modéliser les connaissances des élèves. Du fait que la littérature abonde dans le domaine particulier des équations et ce champ ayant déjà été analysé au sein du micro-monde Aplusix, nous restreindrons notre étude de la modélisation des connaissances algébriques à celles des développements et réductions d'expressions polynomiales, règles du calcul littéral.

Après une étude de ces règles au sein de l'enseignement français ainsi que des difficultés qu'elles suscitent chez l'apprenant et de la problématique de leur modélisation informatique, nous porterons une attention particulière à la modélisation didactique puis informatique de l'apprenant, nécessaire pour retracer son cheminement intellectuel. Nous tenterons, enfin, de construire des règles de réécriture, interprétations des stratégies de résolution utilisées par les élèves et ainsi, de contribuer à la construction d'un diagnostic automatisé cherchant à faire émerger les conceptions des élèves.

### **I. LES REGLES DU CALCUL LITTÉRAL**

Donnons, dès lors, une définition du calcul littéral selon Terquem, extraite du manuel d'algèbre publié en 1827, « à l'usage des personnes privées du secours d'un maître » : « la partie de l'algèbre qui enseigne les règles pour exécuter les opérations arithmétiques sur des quantités quelconques se nomme calcul littéral ». Celle de Chevallard, « jeu formel portant sur des écritures », englobe plus clairement la résolution d'équations. Or, pour les raisons citées ci-dessus, nous ne considérerons comme règles de calcul littéral, les seules règles de transformations conservant l'égalité entre deux expressions polynomiales<sup>1</sup>: Aussi reste-t-il, dans notre étude, les règles de développement, de réduction, de factorisation et de conventions d'écriture, règles que nous allons essayer de cerner en donnant un bref aperçu de l'évolution historique « des écritures », – autrement dit, du symbolisme algébrique –, puis de leur place au collège.

---

1 Dans le sens où elles ont la même dénotation au sens de [Drouhard, 1992], cf. 1.3.2.3

## **1.1 Le symbolisme algébrique dans l'histoire**

Trois grandes périodes caractérisent l'évolution du statut des lettres :

- De l'Antiquité à Diophante (III<sup>e</sup> siècle après J.C.) : la période dite « *rhétorique* », où malgré des traces d'abréviations symboliques très anciennes -signes pour la soustraction et l'addition chez les Égyptiens et chez Diophante-, le langage ordinaire prédomine largement dans la résolution de problèmes, en particulier chez les Arabes en dépit du haut niveau de technicité de leur calcul algébrique. Le recours à la géométrie pour traiter des problèmes d'algèbre est systématique.
- De Diophante à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle : « L'algèbre *numéreuse* ». L'usage des lettres est limité à la représentation des quantités inconnues. Ainsi, Maurolico, dit Francesco de Messina, fait usage des lettres mais sans calculer avec elles et, s'il fait des additions et des multiplications, il introduit une nouvelle lettre à chaque fois. C'est à cette époque que la manipulation de certaines expressions algébriques à une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres devient plus familière.
- A partir de F. Viète (1540-1603) : période de « l'algèbre *symbolique* », où l'utilisation des lettres s'étend aux données. F. Viète désigne par des lettres non seulement les inconnues et les puissances des inconnues, ce qui était déjà une habitude, mais aussi les coefficients indéterminés -ce que l'on avait fait en géométrie dans l'Antiquité-. Grâce à lui et à Descartes (1596-1650), un langage mathématique comportant des symboles et leurs règles d'emploi se met en place. Dès 1660, Hudde utilise une même lettre, non affectée d'un signe pour désigner indifféremment un nombre positif ou négatif. Ces notations seront ensuite simplifiées par les mathématiciens de la première moitié du 17<sup>ème</sup> siècle (Harriot et Albert de Girard) pour atteindre leur forme actuelle (des notations différentes pour les puissances, le signe d'égalité et la multiplication).

Ainsi, le symbolisme algébrique, avec ses conventions et ses règles, a subi une évolution conséquente dans l'histoire des mathématiques, dont l'aboutissement doit être assimilé par chaque élève au cours de sa scolarité, comme nous allons le détailler ci-après afin de cerner ce qu'on attend d'un élève lors des exercices de calcul littéral.

## **1.2 Les tâches de développement et réduction dans le secondaire français**

### **1.2.1 Leur place dans les programmes actuels**

En arrivant au collège<sup>2</sup>, les élèves doivent s'approprier une nouvelle syntaxe et de nouveaux usages d'outils familiers.

En sixième

On trouve, dans le programme de sixième, deux chapitres totalement distincts :

- \* Initiation à la résolution d'équations;
- \* Initiation aux écritures littérales.

La désignation de l'inconnue par une lettre n'étant pas nécessaire à ce niveau-là et aucune

<sup>2</sup> Cf. Annexe 1, p62 pour les programmes officiels.

technique n'étant installée, la référence au sens de l'opération reste très présente. L'algèbre prend du sens grâce à son intérêt "économique" :

« on doit effectuer les calculs :  $15 \cdot 3 + 7$ ;  $15 \cdot 9 + 7$ ;  $15 \cdot 0 + 7$ ;  $15 \cdot 11 + 7$ ; etc. Comment peut-on donner plus rapidement la consigne ? »

Un travail sur le sens de l'égalité est aussi demandé. Le signe « égal » peut avoir le sens de relation et non uniquement le signal de l'exécution d'une procédure :

« écrire  $2 + 1/3 = 1 + 4/3$  ;  $8 = 6 + 2$  etc. et pas seulement  $6 + 2 = 8$  ».

### En cinquième

Contrairement à ce qui est proposé en classe de sixième, les thèmes « Calcul littéral » et « Initiation à la résolution d'équations » sont étroitement imbriqués. La lettre prend un nouveau statut : celui d'indéterminée où l'égalité est toujours vraie (la première de ces égalités, exigible en cinquième, est l'égalité liée à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). L'inconnue est désignée par la lettre dans les équations mais la résolution s'appuie encore uniquement sur le sens des opérations.

En fin de cinquième, l'élève doit avoir rencontré les différents statuts de la lettre et de l'égalité.

### En quatrième et en troisième

D'autres identités apparaissent : double distributivité et identités remarquables.

La notion de fonction est introduite et, avec elle, la notion de variable, ouvrant un autre champ qui occupera une place importante au lycée : la notation fonctionnelle amène à utiliser la lettre avec une nouvelle signification.

Les transformations d'écritures, telles que réduction et factorisation, sont ainsi introduites lors de la résolution de problèmes ou lors de démonstrations. Elles s'imposent comme une véritable nécessité pour éviter les calculs fastidieux. Les élèves perçoivent l'avantage d'avoir effectué un calcul « une fois pour toutes », et d'utiliser la forme réduite pour les calculs successifs.

### Pour résumer :

- en 6<sup>ème</sup> / 5<sup>ème</sup>, on initie les élèves à l'utilisation des lettres ayant différents statuts suivant les problèmes posés,

- en 4<sup>ème</sup> / 3<sup>ème</sup>, on leur fait manier les règles du calcul littéral.

Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
Substitution de valeurs numériques dans une formule.	$k(a + b)$ ; Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs dans une expression littérale	Développement d'expressions. Effets sur l'ordre de + et de X . Équations du premier degré.	Factorisation (identités) Problèmes se ramenant au 1 <sup>er</sup> degré Systèmes d'équations à 2 inconnues

### Au lycée :

Le processus de modélisation est prédominant au détriment d'exercices sur l'interprétation et la manipulation d'écritures algébriques : « Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de

problèmes ou de démonstration » (extraits du Programme de Seconde). Cependant l'accent est aussi mis sur le choix de l'écriture la plus pertinente : de manière interne (utiliser l'expression appropriée : factorisée, développée ou réduite) et externe (représentation algébrique ou graphique).

Ainsi, l'élève se doit-il de maîtriser, au cours de sa scolarité, toute une nouvelle typographie et de trouver la plus pertinente selon le contexte.

Le *réseau trophique* du développement et réduction va nous permettre de synthétiser le rôle et la place de ces procédés dans les mathématiques du premier cycle du secondaire.

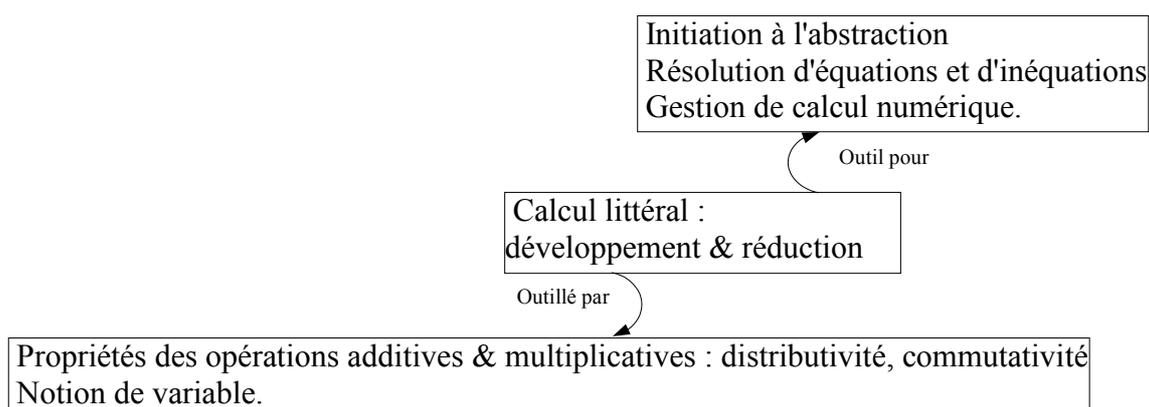


schéma 1

*Réseau trophique du développement et réduction d'expressions polynomiales*

### 1.2.2 Etude des manuels

Ainsi l'activité algébrique est riche au collège et la place du calcul littéral y semble importante. Pourtant, il n'est pas détaillé, formellement, ce qu'on entend, par exemple, par réduire une expression. Aussi, pouvons-nous nous poser la question qu'est-ce que développer et qu'est-ce que réduire une expression algébrique ? Développe-t-on seulement les produits ou des expressions plus ou moins compliquées telle qu'une combinaison linéaire de produits ?  $-(5x) = -5x$  est-il un développement ? Doit-on distinguer la réduction de la simplification basée sur les conventions d'écriture ? Pour répondre à ces questions, regardons ce qu'il en est dans les manuels scolaires français, autres représentants institutionnels du savoir, par une approche praxéologique ; Décrite par un quadruplet, constitué d'une tâche - artefact, construit institutionnel -, d'une technique - manière de résoudre un type de tâches - d'une technologie - discours rationnel sur une technique - et d'une théorie - discours sur une technologie -, la praxéologie permet d'analyser les connaissances mathématiques, ici les règles du calcul littéral, qui peuvent se construire au sein d'une institution, ici les manuels.

La plupart des manuels ont fait le choix de consacrer un chapitre entier à ces règles, en le dissociant des chapitres qui leur donnent du sens, tel que celui sur les équations. En cela, ces règles peuvent être rangées dans la catégorie des « objets de savoir mathématique<sup>3</sup> »,

3 Autrement dit, savoir à enseigner « Seuls ces objets de savoir sont pleinement des (candidats à être des) objets d'enseignement.

pour reprendre les termes de Chevallard. Cependant, l'absence d'algorithme de développement, reconnu comme tel, et la carence d'enseignement de certaines notions internes, telle que la notion de variable, peuvent aussi leur donner le statut de « notions paramathématiques<sup>3</sup> ». L'élève doit jongler entre forme factorisée, développée ou réduite alors même qu'il n'existe pas une distinction formelle et universelle entre réduction et développement, confusion qui se retrouve dans certains manuels scolaires :

- \* Selon Diabolo, 4<sup>ème</sup>, chez Hachette, « réduire une expression, c'est l'écrire comme une somme ayant le moins de termes possible. » Le "moins" restant ambiguë et à charge de l'élève, de le comprendre !
- \* Dans le nouveau Pythagore, 4<sup>ème</sup>, 1998, chez Hatier, réduire c'est « rassembler les  $x^2$  entre eux et les  $x$  entre eux ».
- \* Tandis que pour Nouveau décimale, 3<sup>ème</sup>, chez Belin, « réduire une somme algébrique, c'est regrouper des termes en effectuant des calculs lorsque cela est possible. »
- \* Voilà aussi ce que l'on trouve dans le manuel Cinq sur cinq (1997), 4<sup>e</sup>, chez Hachette, qui inclut le développement dans l'acte de réduction :

2° Le résultat obtenu avec  $x$  peut se « réduire » en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$5(2x + 3) - 15 = 5 \times 2x + 5 \times 3 - 15 = 10x + 15 - 15 = 10x$$

Le programme de calcul peut donc se réduire à multiplier par 10 le nombre de départ. (C'est effectivement plus rapide !)

#### Commentaire

« Réduire » évoque l'idée de « faire plus court » et peut souvent être remplacé par « simplifier ».

- Pour Cinq sur cinq, le développement ne concerne qu'un *produit* alors que pour Diabolo, p 43, « développer une expression, c'est l'écrire comme somme de termes. »

Le développement, la réduction et la factorisation constituent les trois types de tâches que l'on peut trouver dans les manuels, en ce qui concerne la manipulation des règles sur les polynômes. Elles sont présentées, en même temps, comme des techniques, voire des technologies de ces mêmes tâches, entremêlement qui peut être à la source de la confusion. Ainsi, la tâche de la réduction est justifiée par la factorisation -cf. Document 1- qui, elle-même, est une tâche, comme le résume le tableau ci-dessous. La technologie, justification de la technique utilisée pour développer, est la même que pour la tâche factoriser : l'identité  $ab+ac = a(b+c)$ .

Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement : ce sont des objets de savoir « auxiliaires » [...] ils doivent être « appris » (ou plutôt connus) mais ils ne sont pas « enseignés ». » [Chevallard, 1998], pp49.

Tâche	réduction	développement	factorisation
Technique	$ab+ac \rightarrow a(b+c)$	$a(b+c) \rightarrow ab+ac$	$ab+ac \rightarrow a(b+c)$
Technologie	factorisation	$ab+ac = a(b+c)$ ou discours géométrique	$ab+ac = a(b+c)$ ou discours géométrique
Théorie	les lois du corps des complexes	les lois du corps des complexes (distributivité de la multiplication sur l'addition)	les lois du corps des complexes (distributivité de la multiplication sur l'addition)

Quadruplet de l'organisation mathématique ou praxéologie des objets développement, réduction et factorisation

GÉNÉRALISATION : On montrerait d'une façon analogue que, si les soustractions indiquées sont possibles :

$$(a - b + c - d) n = an - bn + cn - dn$$

et que :  $n(a - b + c - d) = an - bn + cn - dn$ , etc.

[..]

APPLICATION : mise en facteur

L'égalité précédente, écrite dans l'ordre inverse, montre que si, dans un polynôme arithmétique, tous les termes sont des multiples d'un même nombre  $n$ , on peut remplacer ce polynôme par un produit de facteurs.

$$an - bn + cn - dn = n(a - b + c - d)$$

[..]

La réduction des termes semblables (c'est-à-dire contenant la même lettre) d'un polynôme arithmétique est possible, au moyen de plusieurs mises en facteur, s'il est composé de multiples de plusieurs nombres.

Exemple :

$$\begin{aligned} 12a + 3b - 4c + 5a - 2b + 8c - 7a + b &= (12a + 5a - 7a) + (3b - 2b + b) + (8c - 4c) \\ &= a(12 + 5 - 7) + b(3 - 2 + 1) + c(8 - 4) \\ &= 10a + 2b + 4c \end{aligned}$$

Document 1

En 67, la réduction est considéré comme une application de l'identité  $a(c+d)=ac+ad$  tiré de « Mathématiques, classe de 5<sup>e</sup>, Hatier, 1967 »

Le discours sur la factorisation évoluera au cours de la scolarité puisqu'il prendra tout son sens lors des résolutions d'équations. Cependant, il ne semble pas exister un véritable discours justificatif sur la technique du développement. En effet, il est rarement rappelé qu'elle est fondée sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. D'autre part, en présence de lettres dans le produit, la multiplication étant prioritaire et ne pouvant être effectuée directement à cause de la présence de lettre, le développement s'impose. Or nombreux sont les élèves qui développent l'expression  $(-3-6)*(6-8)$  alors que le calcul devrait s'imposer si la justification sur la technique avait été assimilée. Une autre raison de l'utilisation de cette technique est son efficacité lors de certains calculs mentaux : il peut être à la charge de l'élève de trouver le développement judicieux pour calculer plus rapidement  $7*15$ .

Pourtant, malgré ces confusions ou manque de justification, les consignes « développer » ou « réduire » sont utilisées, à tout va, dans les exercices de manipulation d'expressions algébriques et elles ne semblent, à la fin du collège, ne plus soulever de questions d'interprétation (indépendamment de l'exécution correcte de la tâche) de la part des élèves. Nous pouvons nous demander si elles ne sont pas alors comprises et assimilées par les élèves à force d'exercices-modèles et au vue des rétroactions de la part des

enseignants : ainsi l'élève apprendra-t-il, à ses dépens, que la consigne « développer » comprend la consigne « réduire » pour certains professeurs ou que « la réduction » inclut « la simplification ». C'est à travers un discours ostensif (autrement dit, le montré) de la part de l'enseignant, que l'élève semble apprendre. Ces notions semblent donc, par leur implicite, faire partie du contrat didactique<sup>4</sup>, en ce sens où une partie de ce qu'on attend de l'élève reste à sa charge. Remarquons, dès à présent, que ce genre d'attentes peut entraîner l'élève à occulter son savoir au profit d'une réponse<sup>5</sup>, sujet sur lequel nous reviendrons dans la partie IV, lors de l'analyse de certains types d'erreurs.

### **1.2.3 Point de vue adopté**

Si le savoir-faire "développer" n'est pas explicitement défini dans les manuels scolaires, il l'est, cependant, dans certains ouvrages destinés aux mathématiciens ou aux enseignants. Une première définition en est accessible dans [Bouvier et al, 1993], cf. Annexe 2b, définition que nous adopterons dans la suite. Le développement  $y$  est défini comme la transformation réciproque de la factorisation : si un produit  $AB$  est une factorisation d'une somme  $C+D$ , on dit que  $AB$  a pour développement  $C+D$ .

Baruk rejoint cette définition et en précise les pourtours [Baruk, 1992]. Pour elle, *développer une expression* ne concerne « généralement<sup>6</sup> » qu'un produit que l'on transforme en somme algébrique grâce à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition ; *effectuer* en est un synonyme. Quant à la réduction d'une expression littérale, elle consiste à « compter ensemble » les termes semblables, dont un synonyme pourrait être *simplifier*. Elle distingue ces deux notions en caractérisant la première comme un déploiement et la seconde comme un resserrement. Elle reconnaît que des abus littéraires sont pratiqués en utilisant, par exemple, le terme de "développer et réduire" pour des expressions où, seule, la réduction est, en fait, applicable.

Pour la suite, nous nous rallierons à ces précisions qui permettent de mieux cerner une des difficultés que peut rencontrer un élève quand il utilise ces notions pour la première fois. Outre l'imprécision sur l'algorithme de ces tâches, l'élève, qui aborde le calcul littéral, est confronté à d'autres obstacles dont des tentatives d'explications vont être données dans le paragraphe suivant.

## **1.3 Difficultés rencontrées par les élèves en calcul littéral**

A la sortie de l'école primaire, les élèves ont une pratique exclusive de l'arithmétique. Toutes les situations rencontrées -situations concrètes pour la plupart- se résolvent uniquement avec des nombres. La lettre, présente dans le numérique, est apposée telle une étiquette pour désigner un objet. Le paragraphe 1.2.1 a permis de rappeler qu'à partir du collège, une *rupture* s'amorçait. Étalée sur tout le 1<sup>er</sup> cycle, l'utilisation des lettres apparaît

4 « Le contrat didactique peut être défini comme l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. » [Brousseau, 1983].

5 « L'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. » [Brousseau, 1990].

6 L'ambiguïté n'est pas totalement levée.

dans des résolutions algébriques dès la 6<sup>e</sup>, où elles désignent dès lors un nombre. Ainsi le statut des lettres évolue-t-il au cours de la scolarité et la problématique essentielle du collège réside-t-elle dans le passage d'un raisonnement n'ayant le recours à l'écrit que pour effectuer des *calculs* numériques à un raisonnement utilisant des *relations* entre les nombres et les lettres.

Outre les difficultés soulevées par cette rupture, passage obligé entre arithmétique et algèbre et qui sera détaillée en 1.3.2, des travaux ont montré que le développement de la pensée algébrique de l'élève pouvait aussi être rapproché de celui de l'histoire de l'algèbre et de l'évolution des programmes [Sfard, 1991]. Historiquement (cf. 1.1), l'algèbre est apparue comme outil "adéquat" à la résolution de problèmes, supplantant, dès lors, l'arithmétique par sa puissance de résolution, son efficacité et sa rigueur mais aussi, comme le précise Chevallard, parce qu'elle apparaît comme l'accomplissement de l'arithmétique [Chevallard, 1984] ou comme une "arithmétique généralisée" (Poincaré, XIX<sup>e</sup> siècle). Cependant, l'algébrique conservait le rôle d'outil du numérique et inversement, l'arithmétique d'outil d'étude de l'algébrique. Pourtant, ce lien étroit va s'atténuer au cours des années de l'enseignement, explication plausible, selon Chevallard, de l'incompréhension chez certains élèves face à l'introduction subite de cette demande d'abstraction puisqu'elle ne s'impose plus comme outil pertinent de résolution.

### 1.3.1 Rupture dans l'évolution des programmes de l'enseignement

L'opposition de l'arithmétique et de l'algèbre dite traditionnelle, dont la raison d'être était à la fois historique, statutaire et formelle, disparaît avec la réforme des mathématiques modernes de 1970. L'algèbre perd alors de son sens initial en ne semblant exister que comme théorie de l'exemple concret numérique ; le numérique, quant à lui, devient ainsi justificatif, donneur de sens et exemple de l'algébrique, en faisant disparaître la démonstration théorique du résultat obtenu. « La justification de l'algébrique s'appuie sur un mode de fonctionnement du numérique qui n'est en fait qu'un décalque du fonctionnement de l'algébrique et qui, donc, suppose l'algébrique ! » [Chevallard, 1984]. Les idées se substituent au calcul comme le montre l'exemple ci-dessous :

#### 2 Produit d'une différence par un nombre

EXEMPLE : Soit à calculer :  $(7 - 2) \times 3$ .

On a successivement :

$$\begin{aligned} (7 - 2) \times 3 &= (7 - 2) + (7 - 2) + (7 - 2) && \text{définition du produit} \\ &= 7 - 2 + 7 - 2 + 7 - 2 \\ &= 7 + 7 + 7 - 2 - 2 - 2 \\ &= (7 + 7 + 7) - (2 + 2 + 2) && \left. \begin{array}{l} \text{propriété des} \\ \text{polynômes arithmétiques} \end{array} \right\} \\ &= 7 \times 3 - 2 \times 3 \end{aligned}$$

D'UNE MANIÈRE GÉNÉRALE : si  $a \geq b$ ,

$$\begin{aligned} (a - b) \times n &= \underbrace{(a - b) + (a - b) + (a - b) + \dots + (a - b)}_{n \text{ termes}} \\ &= \underbrace{(a + a + a + a + \dots + a)}_{n \text{ termes}} - \underbrace{(b + b + b + b + \dots + b)}_{n \text{ termes}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b) n &= an - bn \\ \text{et } n(a - b) &= na - nb && \text{commutativité.} \end{aligned}$$

$$n(a - b) = (a - b)n = an - bn$$

Document 2

*Perte de sens de l'algèbre : plutôt que de calculer le produit de 3 par la différence de 7 et 2, ce qui demande 2 opérations, il recommande le développement, ce qui demande 3 opérations. « Mathématiques, classe de 5e, Hatier, 1967 »*

La remarque de Combiér s'inscrit dans la lignée de cet exemple : « de très nombreuses leçons relatives à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition sont

construites sur un patron voisin, où l'on donne à voir aux élèves, l'abstraction étant supposée immédiate et facile. Nombreux sont les professeurs qui peuvent témoigner du contraire. » [Combiér, 1996]

La rupture arithmético-algébrique est ainsi niée avec la réforme des maths modernes et le terme même d'algèbre disparaît. La place du calcul algébrique jusque-là très importante, voire même étouffante, dans le programme de quatrième, diminue et laisse place à « l'algèbre moderne », inflation théorique de l'algèbre traditionnelle. Certes, le calcul littéral y est toujours présent mais il ne constitue « ni l'essentiel, ni surtout les débuts » [Chevallard, 1984]. De plus, avec les règles de calcul littéral, le sens se perd dans les démonstrations : « le raisonnement se fait calcul » [Chevallard, 1989], ces règles étant appliquées sans nécessairement avoir été comprises.

Cette évolution des programmes, suscitant la disparition du discours sur la nécessité de l'algèbre peut être à l'origine de la gêne que rencontrent certains élèves lors de l'introduction des règles du calcul littéral. D'autres explications, décrites ci-après, ont été données, concernant le saut statutaire entre objets arithmétiques et objets algébriques.

### **1.3.2 Ruptures des statuts**

En arithmétique et en algèbre, il existe certains outils communs : les signes opératoires, le signe "=", l'usage des parenthèses. Or ces symboles ne vont pas forcément avoir le même sens, ou du moins le même usage, selon le domaine dans lequel on travaille. C. Kieran les nomment "fausses continuités" [Kieran, 1992] et les nouveaux éléments, "discontinuités" -telles que les règles de développement, la lecture structurale et non uniquement procédurale- On peut, en fait, identifier une double rupture entre les domaines arithmétique et algèbre, comme l'expose Vergnaud [Vergnaud, 1987] :

- \* celle résultant de l'utilisation d'objets mathématiques communs et de l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme les équations, les inconnues, les variables ou les fonctions.
- \* celle résultant de l'introduction d'un détour formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement.

Nous isolerons de l'ensemble des objets nouveaux uniquement ceux qui concernent les règles de calcul littéral, sujet qui, seul, nous intéresse ici. Ainsi omettrons-nous volontairement de parler, par exemple, des équations.

#### **1.3.2.1 Le statut des lettres**

A l'entrée au collège, nous avons vu que l'élève, qui, jusque-là, jonglait avec des nombres et des signes, est, pour la première fois, confronté à l'algèbre : des rudiments arithmétiques, il passe au maniement des lettres, ce qui demande de conceptualiser des calculs qui étaient relativement concrets auparavant.

Le document d'accompagnement du cycle central stipule, en particulier, que « l'acquisition de techniques de calcul faisant appel à des lettres est un des points délicats de

l'enseignement des mathématiques au collège ». Certes, en arithmétique, les lettres étaient déjà présentes mais elles n'étaient utilisées que pour représenter des mesures (12 m) ou pour jouer un rôle d'étiquette ( $L \times l$ ) mais comme le précise Grugeon « l'entrée dans l'algèbre s'accompagne d'un élargissement des significations : les lettres désignent maintenant des nombres, 12m signifiera aussi 12 fois le nombre de mètres, m désignant un nombre. [...] Le statut d'une lettre dépend donc du contexte et n'est pas réductible à celui d'étiquette. » [Grugeon, 1995]. Ainsi la signification des lettres, présente dans une expression, évolue tandis que l'expression peut, elle, ne pas changer. C'est pourquoi les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets, comme le confirme le projet CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Sciences, cf.[Booth, 1984]) Des travaux de recherche ont classé les différents statuts que peut prendre une lettre [Küchemann, 1981]:

- lettre évaluée : à la lettre est assignée une valeur numérique,
- lettre non considérée : la lettre est ignorée,
- objet concret : la lettre est considérée comme une étiquette,
- inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu à rechercher,
- nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs,
- variable : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel.

Les règles de calcul littéral utilisent la lettre comme variable. ( $k(a+b) = ka+kb$ ) mais au sein d'un exercice, ces règles peuvent être utilisées et la lettre prendre différents statuts.

Par exemple, dans la résolution d'équation suivante :

$$\begin{array}{ll} x + 7 = 8 & (1) \\ x + 7 - 7 = 8 - 7 & (2) \\ x = 1 & (3) \end{array}$$

Selon que le raisonnement est horizontal ou vertical, le statut de la lettre (et donc du signe "=", visible ou sous-entendu) change : en effet, entre le membre de gauche  $x + 7$  et le 8 (1), il y a recherche d'équilibre,  $x$  n'est pas une variable mais une inconnue ; on cherche à déterminer quelles seraient les valeurs à donner à  $x$  pour que cette égalité soit *vraie* ! (Ainsi, certaines égalités sont fausses !) tandis qu'entre les deux membres de gauche  $x + 7 - 7$  (2) et  $x$  (3), il y a bel et bien égalité, quelle que soit la valeur de  $x$  ;  $x$  a, ici, le statut de variable. En revanche, entre le  $x + 7$  (1) et  $x + 7 - 7$  (2), il n'y a aucune égalité possible.

On rejoint, de la sorte, Vergnaud qui regrette que l'enseignement n'accorde que peu de place à la modélisation et à la lecture des formules en termes de relations entre variables [Vergnaud, 1986].

### **1.3.2.2 Procédural ou structural ?**

La distinction arithmétique-algèbre se retrouve dans l'opposition procédural-structural : en arithmétique, les chaînes de nombres et d'opérations sont considérées comme des procédures visant à produire une réponse tandis qu'en algèbre, les symboles ont du sens par eux-mêmes, indépendamment des procédures : ainsi  $a + b$  indique à la fois une

procédure et un résultat, le signe + ne donnant pas forcément lieu à une exécution de calcul.

Comme le rappelle Artigue [Artigue, 1996] :

\* l'arithmétique est procédurale, basée sur des opérations de nombres;

\* l'algèbre est structurale, fondée sur des opérations sur des écritures algébriques au moyen de transformations.

Elle cite aussi Kieran [Kieran, 1991] qui précise un peu plus cette opposition : « *Procedural* refers basically to arithmetic operations carried out on numbers to yield numbers. For instance, if we take the algebraic expression,  $3x + y$  and replace  $x$  and  $y$  by 4 and 5, the result is 17. Another example involves this solving of  $2x+5 = 11$  by substituting various values for  $x$  until finding the correct one. In these two examples, which look ostensibly algebraic, the objects that are operated on are not the algebraic expressions but their numerical instantiations. Furthermore, the operations that are carried out on these numbers are computational –they yield a numerical result. Thus, both of these examples illustrate a procedural perspective in algebra. The term *structural* refers, on the other hand, to a different set of operations that are carried out, not on numbers, but on algebraic expressions. For example, if we take the algebraic expression,  $3x+y+8x$ ; this can be simplified to yield  $11x+y$  or divided by  $z$  to yield  $(11x+y)/z$ . Equations such as  $5x+5=2x-4$  can be solved by subtracting  $2x$  from both sides to yield  $5x+5-2x=2x-4-2x$  which can be subsequently simplified to  $3x+5=-4$ . In both of these examples, the objects that are operated on are the algebraic expressions, not some numerical instantiations. The operations that are carried out are not computational. Furthermore, the results are yet algebraic expressions. »

Ses travaux ont montré que les élèves avaient un penchant net pour les aspects procéduraux de l'algèbre : au début de l'apprentissage, bien souvent, les élèves perçoivent l'expression donnée comme une suite d'opérations arithmétiques et non dans sa globalité. L'ordre des priorités est régulièrement omise dans le seul but d'obtenir un résultat sans autre signe opératoire, erreur provoquée, de surcroît, par la présence du signe " = ", perçu comme signal d'exécution et d'annonce du résultat.

### **1.3.2.3 Sémantique ou syntaxique ?**

De nouveaux objets sont donc à acquérir. Ils ont leurs règles syntaxiques propres (ou conventions), et des sémantiques, au sens de Drouhard, différentes : leurs *dénotations* (un même nombre ou expression peut avoir différentes écritures (fractionnaire, décimale, développée, factorisée etc) mais réfèrent toutes à un même nombre ou expression, leur unique *dénotation*), leur *sens* (chaque écriture a un *sens* différent), leur *interprétation* [Drouhard, 1992]. L'apprenant expert doit savoir jongler d'un domaine à l'autre, oublier, parfois, le point de vue sémantique et le sens caché d'une expression pour ne voir qu'un algorithme dont la technique doit être acquise. L'on peut, cependant, regretter de, parfois, oublier d'explicitement cette distinction sémantique-syntaxique dans l'enseignement.

Ceci ne constitue qu'un résumé à un niveau très élémentaire sur la transition arithmétique-algèbre, thème sur lequel la littérature abonde et qui est souvent citée comme jouant un rôle dans l'installation de l'échec chez certains élèves, lors de l'introduction du calcul littéral : nouveaux objets, nouveaux statuts, besoin de nouveaux traitements et d'une nouvelle perception d'anciennes expressions, autant d'obstacles pour le jeune apprenant en calcul littéral.

#### **1.4 Première conclusion**

Ces travaux attestent, non seulement, qu'au collège, l'activité mathématique s'articule autour de l'algèbre, dont les tâches de développement et réduction sont des outils essentiels pour en acquérir la maîtrise, mais aussi, que cette activité algébrique est source de difficultés. Ces deux points témoignent de l'intérêt de notre sujet, qui est de modéliser les connaissances dans le domaine du développement-réduction d'expressions polynomiales au niveau du secondaire français.

Or, déterminer et repérer les difficultés que rencontrent les élèves nécessitent un travail fin qui doit s'inscrire dans la durée. Se pose, dès lors, le problème quant aux moyens dont disposent l'enseignant et le chercheur pour répondre à ce besoin. Nous faisons, alors, l'hypothèse de recherche qu'un environnement informatique est un outil pertinent pour les aider à caractériser automatiquement les productions des élèves et notamment leurs erreurs.

Trois questions fondent, alors, notre problématique : la première porte sur les représentations possibles, en informatique, du domaine choisi ; la seconde sur la modélisation de l'apprenant d'un point de vue didactique ; et la troisième sur cette modélisation au sein d'un environnement informatique.

question 1 *Comment modéliser le calcul littéral dans un environnement informatique ?*

question 2 *Quelle prise en compte de l'apprenant, d'un point de vue didactique ?*

question 3 *Comment modéliser, de manière informatique, le comportement de l'apprenant ?*

La question 1 est développée ci-dessous ; quant à la question 2 et question 3, elles ne seront abordées qu'en partie II.

#### **1.5 Le calcul littéral en informatique**

Indéniablement, « l'informatique, bien utilisée, pourrait modifier [...] notre vision d'ensemble de la connaissance et de l'apprentissage » [Papert, 1980]. Elle offre de nouveaux cadres, différents de celui constitué par le papier/crayon. Indépendamment du domaine, certains critères de l'enseignement, pour ne pas dire tous, sont modifiés : la motivation, l'autonomie de l'élève, la position de l'enseignant etc. ; sources nouvelles d'amélioration de l'apprentissage ou nouvelles difficultés à prendre en compte (telle que l'hétérogénéité des connaissances informatiques de base chez les élèves) ? Nombreux sont les travaux sur ce sujet et, bien que ces questions présentent un intérêt certain, nous allons

réduire notre champ d'étude à la problématique de la modélisation informatique de la connaissance, croisée de l'Intelligence Artificielle et de la didactique, comme le précise Balacheff [Balacheff, 1994]. Ceci induit, d'une part, une représentation de la connaissance théorique, problématique de la question 1 développée ci-dessous et, d'autre part, une prise en compte et une modélisation de l'apprenant, sujet que nous aborderons en partie II.

### 1.5.1 Modélisation informatique

Il semble essentiel, pour Balacheff, de se demander « quelles conséquences peut avoir cette représentation [celle du monde, proposée par un ordinateur et en ce qui nous concerne la représentation de l'Algèbre] sur la nature des apprentissages qui résulteront de l'interaction avec un tel système » [Balacheff, 1994], et quelle est la fidélité entre représentation et connaissance épistémique<sup>7</sup> de référence. Il précise que « toute représentation a des propriétés héritées à la fois des choix de modélisation qui ont été faits et des caractéristiques des moyens sémiotiques retenus. »

E. Wenger synthétise le problème de fidélité -epistemic fidelity; [Wenger 1987]- sous la forme d'un schéma :

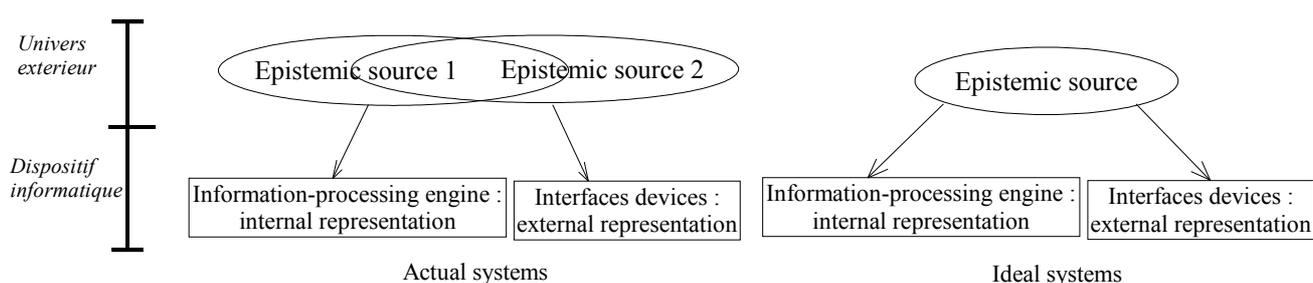


schéma 2

La distinction entre source épistémique et représentation peut être un critère de qualité d'un modèle informatique

Ainsi, les choix de représentations en lien avec les contraintes de la programmation proprement dite forment une *transposition informatique*, au sens de Balacheff (ibid), de la connaissance tant dans l'univers interne du dispositif informatique que dans son interface.

### 1.5.2 Le projet Aplusix

Notre choix d'environnement informatique s'est porté sur le logiciel Aplusix : outre le fait qu'il se place dans le domaine du calcul algébrique, il garde une extrême fidélité avec le cadre papier/crayon en permettant d'avoir accès à une partie de la sphère privée de l'élève. Après une description succincte du logiciel, des exemples de transposition informatique, au sein d'Aplusix, permettront de préciser si cet environnement est en adéquation avec notre point de vue sur les règles de calcul littéral.

<sup>7</sup> Comme le précise Wenger :

“Whether such an epistemic level really exists in some platonic sense is not the point here ;”[Wenger 1987]

### 1.5.2.1 Présentation du logiciel

\* Aplusix est un logiciel d'aide à l'enseignement de l'algèbre. La version *micromonde*, que nous utilisons, a été conçue et réalisée par Nicaud et Bouhineau à l'université de Nantes et à l'IMAG de Grenoble, à partir de l'an 2000. Évoluant régulièrement, Aplusix, dont on peut lire une présentation dans [Bouhineau et al, 2001], offre continuellement de nouvelles fonctionnalités, qui ne seront décrites que dans le cas où elles ont été utilisées pour les expérimentations ou au cours de l'élaboration de ce mémoire. Pour plus de détails concernant l'évolution du logiciel, se référer à <http://aplusix.imag.fr>.

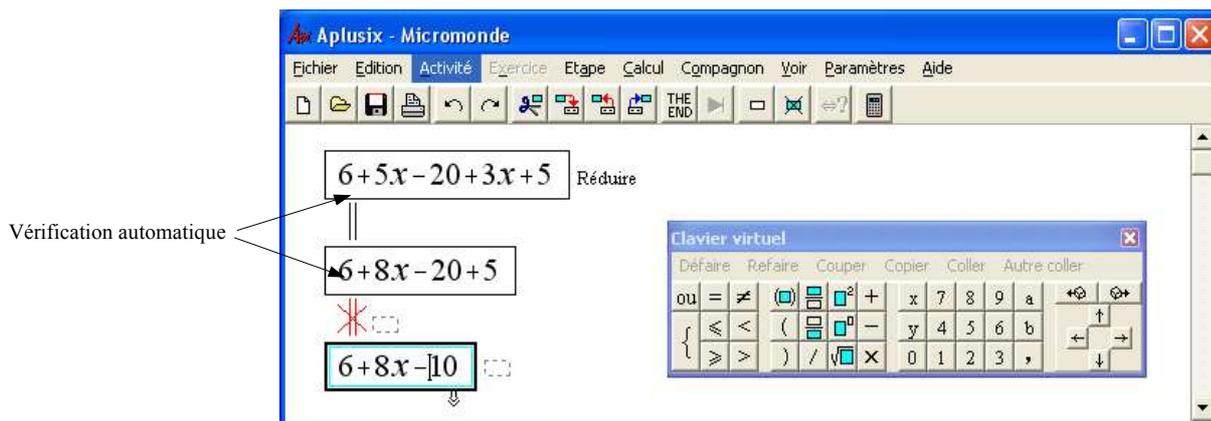
Dans le mode utilisé pour les expérimentations, l'élève se voit proposer des exercices, construits dans le cadre de ces expérimentations, de quatre types distincts, faisant appel à différentes capacités algébriques :

- *Calculer* des expressions numériques,
- *Développer* et *réduire* des expressions polynomiales,
- *Factoriser* des expressions polynomiales,
- *Résoudre* des équations, inéquations ou systèmes.

Dans chaque situation, une expression et une consigne sont présentées à l'élève. L'élève peut alors dupliquer l'expression et la modifier en conséquence.

\* Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, nous avons restreint notre étude aux règles formelles de transformation en calcul littéral, dont les exercices de type 2 et 3 en sont représentatifs comme exercices de manipulation pure de ces règles. Or ce domaine -quoique pouvant paraître déjà restreint- n'en reste pas moins trop large pour avoir un aperçu fin des comportements des élèves. C'est pourquoi, nous avons décidé de nous restreindre plus avant aux seuls développements et réductions, délaissant dès lors les règles de factorisation. Ce choix est dû au fait que la factorisation touche un domaine légèrement différent : quoique implicite dans la réduction d'une expression, elle fait appel à des savoir-faire autres, tels que la reconnaissance de formes, entraînant de nouveaux comportements de la part des élèves.

\* La vérification automatique est une des particularités du logiciel Aplusix : elle détermine si deux expressions algébriques sont égales ou non, au sens de la dénotation, cf.1.3.2.3. Ce mode est paramétrable par le professeur : permanent, à la demande de l'élève ou jamais. Cette rétroaction et son effet sur le comportement de l'élève sont analysés dans [Bouhineau et al. 2003]. Bien que l'impact soit conséquent sur l'apprentissage et que cela soulève indéniablement « la question du sens que donne l'élève au statut de l'équivalence dans APLUSIX » [Bouhineau et al. 2003], nous laisserons de côté cette question dans notre travail.



Document 3

Activité : micromonde; l'élève a effectué une étape correcte puis une étape incorrecte

\* Une autre fonctionnalité nous intéresse particulièrement dans notre recherche : celle du magnéscope qui nous permet d'accéder à la production de chaque élève. Nous reviendrons sur cette particularité dans la partie 2.4.1.

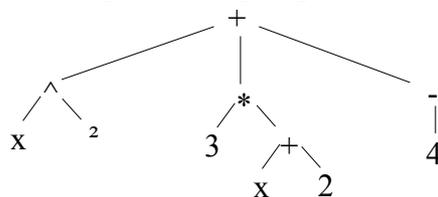
D'autres fonctionnalités paramétrables ou non sont disponibles (création de fiches d'exercices, aides, commentaires exigés de l'élève etc.) mais elles ne sont pas intervenues dans notre travail et, par conséquent, ne sont pas décrites ici.

### 1.5.2.2 Exemples de représentations

Comme le dit Balacheff, « les choix des outils de représentation des connaissances déterminent largement les possibilités ou la forme de leur traitement. » [Balacheff, 1994], pp17. Nous allons voir quelques exemples de représentations dans l'environnement Aplusix et leurs impacts sur notre travail.

Intéressons-nous, dans un premier temps, aux problèmes de représentation interne dans cet environnement.

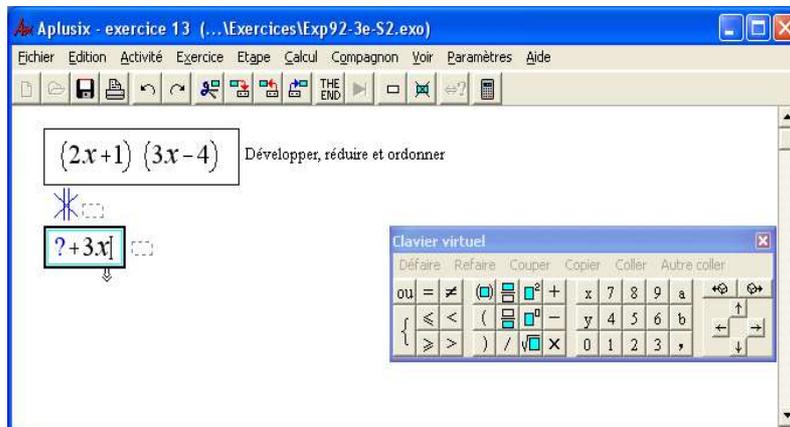
Une expression peut être représentée, en interne, comme un arbre dont les feuilles sont des symboles de constantes ou de variables et dont les autres nœuds sont des symboles de fonction [Nicaud, 1994], cf. graphe 1. Les justifications d'un tel choix sont diverses et sont accessibles dans [Nicaud, 1994] ; nous pouvons, cependant, noter que l'algèbre à laquelle s'intéresse Aplusix, est une algèbre complexe, et non rudimentaire, difficilement représentable par des modèles naïfs, par exemple, par une seule chaîne de caractère.



graphe 1  
Représentation arborescente de  
la somme du carré de x, du produit de 3 par la somme de x et 2 et de l'opposé de 4,  
d'expression habituelle :  $x^2 + 3(x+2) - 4$

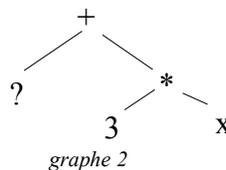
Ce choix de représentation d'expression a impliqué la visualisation, à l'interface, du symbole « ? », pour certaines expressions non mathématiquement bien formées (cf.

Document 4), afin que l'arbre associé à cette expression puisse toujours avoir un sens, cf. graphe 2.



Document 4

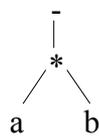
Le symbole « ? » apparaît pour remplacer les arguments manquants.



graphe 2

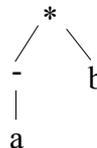
Pour la représentation arborescente le signe ? est nécessaire.

D'autres choix internes en découlent : par exemple, pour l'expression  $-ab$ , Aplusix a dû choisir entre deux représentations possibles :



graphe 3

Représentation choisie par Aplusix



graphe 4

Autre représentation possible, écartée par Aplusix

Notre tâche consistant, en partie, à écrire en langage informatique des règles, représentations de transformations, erronées ou non, effectuées par les élèves –cf. III–, nous avons été obligés de tenir compte de ces choix lors de leur écriture.

Une autre représentation a été déterminante dans notre travail : celle de la notion de développement et de réduction. Compte tenu du manque de définition explicite de ces deux notions, – cf paragraphe 1.2.2 –, nous allons préciser ce qui, pour Aplusix, est considéré comme du développement et ce, comme étant de la réduction, en reprenant les définitions données par Nicaud dans [Nicaud, 1994] :

- Qu'est-ce que développer une expression polynomiale ?

Pour Aplusix, la tâche *développer* consiste à faire disparaître des parenthèses explicites ou non. « Lorsqu'une transformation est effectuée sur un sous-terme  $u$  d'un terme  $e$  fournissant un sous-terme  $w$  d'un terme  $e'$ , nous la caractérisons comme étant du développement si  $w$  est une somme, si le degré formel est conservé et si le degré de

factorisation<sup>8</sup> diminue. »

- Qu'est-ce que réduire une expression polynomiale ?

Une expression est dite *réduite* dans un des deux cas suivants :

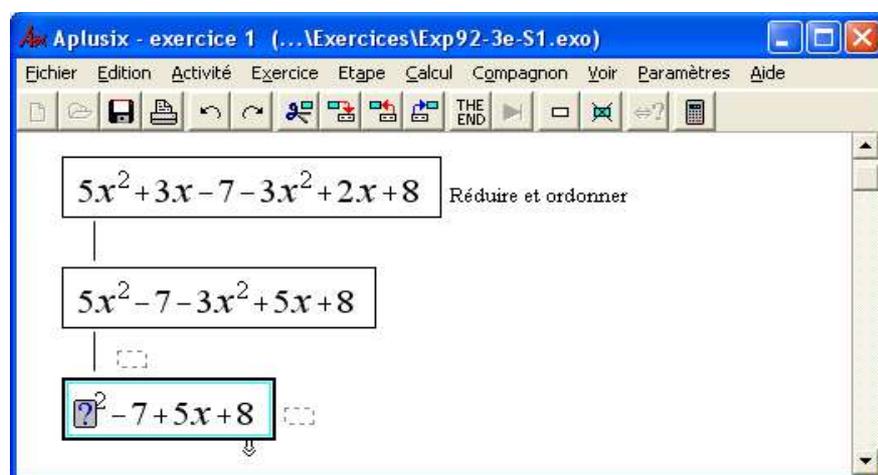
- c'est un groupement (1ère sorte de réduction) si « le degré formel est conservé, si le degré de factorisation est conservé et si le multi-ensemble des degrés formels<sup>9</sup> diminue<sup>10</sup> ; »
- c'est un effondrement (2ème sorte de réduction) si « le degré formel diminue. »

Les critères de terminaison d'un développement (respectivement d'une réduction) correspondent à l'incapacité d'appliquer une nouvelle règle de développement (respectivement réduction).

Exemple :

la réécriture de  $(x+1)^4+(x+1)^2-2(x+2)$  en  $(x+1)^4+x^2-3$  obtenue en développant  $(x+1)^2$  et  $-2(x+2)$  puis en réduisant est un *groupement* car le degré formel (3) et le degré de factorisation sont conservés, et le multi-ensemble des degrés formels diminue, passant de  $\{4, 2, 1\}$  à  $\{4, 2, 0\}$ .

Quant à la représentation externe, elle, aussi, a eu une influence notable sur notre travail. Prenons, comme premier exemple, le problème du signe « = ». Dans le mode sans vérification, le signe « = » n'apparaît pas entre les expressions, seul un trait relie les deux expressions (cf. Document 5).



Document 5

Seul un trait relie les expressions entre elles.

Le signe n'apparaissant pas, les élèves pourraient avoir tendance à l'omettre dans leur productions écrites ou, au contraire, impact favorable, sa disparition pourrait éviter l'effet

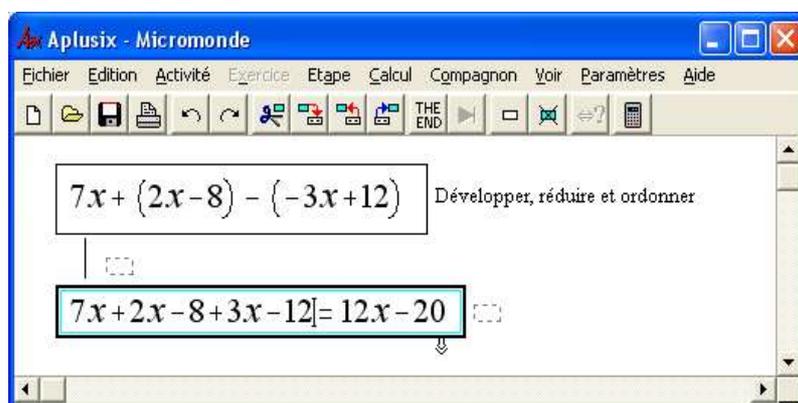
8 Le *degré de factorisation* a pour objet de compter les facteurs non constants d'une expression. C'est 0 pour une constante, 1 pour  $x$ , 1 pour une somme non constante, la somme des degrés de factorisation des arguments pour un produit.

Par exemple, le degré de factorisation de  $4x(2x+1)^3(x^4+1)^2$  est 6.

9 Le *multi-ensemble des degrés formels* est pour une somme, comme son nom l'indique, le multi-ensemble des degrés formels de ses sous-termes directs ;

10 Sur les multi-ensembles formés avec les éléments d'un ensemble totalement ordonné  $E$  (relation  $>$ ), on définit l'*ordre total*  $>>$  de la façon suivante :  $A >> B$  ssi, après suppression dans  $A$  et  $B$  des éléments communs en même nombre, il existe un élément de  $A$  supérieur à tous les éléments de  $B$ . Ainsi,  $\{4, 1\} >> \{3, 3, 3, 2\}$  et  $\{3, 3, 3\} >> \{3, 3, 2, 2\}$ .

du « donneur de résultat », en lien avec le principe d'achèvement des calculs et du dilemme *process-product* [Davis, 1975], sur lequel nous reviendrons dans la partie IV. Cependant, ce choix de représentation a eu un impact direct sur l'écriture même des règles, certains élèves introduisant le signe « = » au sein de leur expression. (cf. Document 6). A la suite de cette observation, des dispositifs ont été pris sur lesquels nous reviendrons en 3.1.4.



Document 6  
Elève Hele; 3ème 1; Sainte Elisabeth;

Néanmoins, excepté le signe « = », l'interface d'Aplusix reste fidèle au cadre papier/crayon. Un autre exemple de représentation externe concerne le choix sémiotique fait par Aplusix. D'une part, seul l'aspect *objet*<sup>11</sup> de l'algèbre, à un niveau relativement élémentaire, est représenté dans les exercices considérés puisqu'il ne sont pas insérés dans un problème plus vaste, où l'algèbre pourrait apparaître comme outil de résolution, comme c'est le cas dans certains autres exercices d'Aplusix. D'autre part, ces objets ne prennent qu'une certaine forme de représentation sémiotique : sous la forme d'expression algébrique mais non sous la forme de graphe ou de fonction.

Des choix, contraintes ou décisions didactiques, ont été faits lors de la conception d'Aplusix, pour permettre une représentation et mise en oeuvre du calcul littéral. Transpositions informatique et didactique sont liées dans ce processus de théorisation et d'informatisation d'objets mathématiques.

### 1.6 Deuxième conclusion

L'environnement Aplusix est en adéquation avec notre point de vue sur les tâches de développement-réduction : leurs définitions rejoignent celles que nous avons adoptées en 1.2.3. De plus, la représentation des objets algébriques choisie nous convient et répond à notre interrogation initiale -question 1-.

Ce logiciel permettant de conserver des traces des productions de l'élève, une nouvelle

11 Au sens de R. Douady, [Douady, 1984] : la dimension *outil* de l'algèbre se révèle dans la capacité de traduire un problème en relations algébriques tandis que son statut d'*objet* se reflète dans l'étude de son ensemble structuré : « inconnues, variables, paramètres, équations, fonctions,..., [objets] dotés de propriétés, de mode de traitement en particulier de nature formelle, de mode de représentation permettant ces traitements : écritures algébriques, graphes, notations fonctionnelles,...Le savoir algébrique s'exprime alors en termes de statuts d'objets algébriques, de compétence à les manipuler et à articuler leurs attributs syntaxiques et sémantiques. » [Grugeon, 1995], p23. C'est dans ce contexte d'algèbre "objet", à un niveau élémentaire, que se place le calcul littéral qui nous intéresse ici.

question s'impose : celle de la nature et du traitement possible de ces traces en vue d'une modélisation de l'apprenant, reformulation de la question 3. Aussi tenterons-nous d'y répondre, dans la partie qui suit, après avoir précisé le type de modélisation didactique que nous souhaitons avoir de l'apprenant -question 2-.

## II. MODELISATION DE L'APPRENANT

Nous considérons que l'apprentissage est visible à travers l'évolution et les manifestations du comportement de l'apprenant. C'est pourquoi, la prise en compte de ce dernier se manifeste, pour nous, par la considération de ses réponses à un problème donné. Elle est ainsi corrélée à la perception que nous pouvons avoir d'une réponse erronée. Nous allons décrire les grands types d'interprétations possibles de l'erreur pour ensuite donner la notre. Puis, nous regarderons cette prise en compte du point de vue informatique afin de préciser, enfin, quelle considération a choisi Aplusix.

### 2.1 Modélisation didactique

#### 2.1.1 Trois courants

Dans le sens commun, l'erreur a un sens souvent négatif<sup>12</sup>, même s'il reste le terme le plus positif des désignations utilisées pour une réponse fautive d'un élève. Avenant d'impuissance pédagogique selon certains, occasion d'apprentissage pour d'autres, la perception de l'erreur peut être classée en trois grandes catégories :

- La première, qui se fonde, avant tout, sur la transmission du savoir, consiste à penser que la qualité de l'apprentissage dépend de celle de la transmission : l'erreur, si elle survient, est due à un *mauvais apprentissage* de la part de l'apprenant, à un manque de travail. Comme le dit Charnay : dans cette perspective, « l'apprentissage est basé sur une reproduction du modèle enseigné [...], l'erreur est faite en terme de manque, en terme d'anomalie » [Charnay & Mante, 1992].
  - \* Cette conception de l'apprentissage ne tire pas parti de l'apparition de l'erreur et ne prend pas en compte l'interprétation du savoir de l'élève.
  - \* En contrepartie, cette démarche permet de gagner du temps : la transmission du savoir n'est pas personnalisée. C'est une méthode efficace si les apprenants sont motivés, attentifs et doués d'une grande adaptabilité.
- La deuxième, relative au béhaviorisme, ne cherche pas à corriger des erreurs une fois qu'elles sont advenues, mais *d'éviter* qu'elles ne surviennent. Cette démarche décortique l'apprentissage en différentes étapes. L'apprenant est guidé pas à pas par une série graduée d'exercices et de consignes. En théorie, l'erreur est évitée ou devancée. Si elle ne l'est pas, elle sera attribuée à un saut trop rapide d'une des étapes.

---

<sup>12</sup> La définition du Larousse donne : *Action de se tromper, faute commise en se trompant ; action inconsidérée, regrettable*; synonymes associés : *aberration, bévue, crime, délit, fausseté, faute, forfait, infraction, péché*.

- \* L'appropriation de la notion risque d'être incomplète et l'autonomie intellectuelle n'est guère favorisée.
- \* L'avantage de cette conception de l'apprentissage est qu'elle favorise un enseignement adapté à chaque élève. De plus, ce dernier est en situation de réussite, puisque les tâches de découverte proposées sont construites pour être réussies par les élèves.
- La troisième, dite constructiviste, voit en l'erreur un aspect *positif*. Elle considère l'erreur comme un indicateur des processus intellectuels mis en jeu par l'élève. Chaque erreur devient un indice de la manière dont raisonne l'apprenant. Aussi celui-ci aura-t-il une chance de mieux cerner la notion abordée : en commettant une erreur, il en aura une meilleure perception ; en jouant avec les *limites* de cette notion, en acceptant ce qu'elle n'est pas, il la maîtrisera mieux, il en aura une *réelle* connaissance.  
Dans cette idée, l'erreur n'est plus considérée comme un obstacle mais comme une étape de l'apprentissage, « *l'expression d'une forme de connaissance* » [Charnay & Mante, 1992] : l'élève apprend de ses erreurs.
  - \* L'enseignement fondé sur cette conception n'est guère praticable dans une classe à effectif élevé. De plus, elle demande du temps de préparation et de la pratique. D'où l'intérêt de l'utilisation d'un logiciel adéquat.
  - \* En revanche, l'interprétation de la notion abordée par l'élève est prise en compte ; elle est considérée comme donneuse de sens à la connaissance.

Nous allons, dans la suite, nous situer dans cette perspective constructiviste, où l'élaboration des connaissances nouvelles s'effectue en acceptant l'erreur comme une marche d'un savoir à un autre.

Ce modèle constructiviste de l'apprentissage a été élaboré à la suite des travaux de psychologues généticiens (en particulier Piaget fondateur des théories d'équilibration et d'accommodation), de chercheurs en psychologie sociale, d'épistémologues (Bachelard) et de didacticiens des mathématiques (Brousseau, Chevallard, Douady, Vergnaud) et nous allons, dans les paragraphes suivants, développer certains de leurs points de vue, qui sans se contredire, se complètent et s'enrichissent. Dans un premier temps, nous approfondirons ce que nous entendons par "erreur" puis nous nous placerons dans la théorie des champs conceptuels de Vergnaud pour tenter de relier ces erreurs.

### **2.1.2 Qu'entendons nous par *erreur* ?**

Pour répondre à cette question, nous rejoignons la définition que Brousseau donne de l'erreur dans son article « les erreurs des élèves en mathématiques », [Brousseau, 2000]. Il désigne une réponse comme étant une erreur si c'est une décision où "l'actant" -ie : l'apprenant- est en mesure de l'identifier comme étant une décision qui lui revient : d'autres choix lui sont permis et il doit avoir les connaissances suffisantes pour cela.

Brousseau distingue ainsi l'erreur de la faute ou encore de l'échec, en lui attribuant ce statut quand l'écart de réponse entre ce qui est désiré et ce qui est obtenu est significatif, dans le sens suivant :

- cet écart est reproductible : il a une certaine persistance et récurrence et ne peut, de ce fait, être expliqué par l'étourderie, le hasard ou une absence de contrôle.

- il n'est pas isolé : il peut être mis en corrélation avec d'autres écarts avec lesquels ils forment une sorte de réseau d'erreurs. Ce réseau s'appuie sur une logique et sur une conception que les élèves se sont construites.

- il peut être pertinent mais non adéquate à l'action demandée. « La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité et aussi un domaine où elle est a priori pertinente et où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs » [Brousseau, 1983].

- il est propre à une connaissance mathématique, à un moment précis, dans une situation.

L'erreur est donc source d'apprentissage, comme il le précise dans [Brousseau, 1983], adaptant la vision de Bachelard sur la connaissance scientifique :

« L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. »

Par conséquent, l'erreur est l'expression ou la manifestation d'un savoir ancien qui se dresse en obstacles pour acquérir et maîtriser de nouveaux concepts. Nous partons du postulat qu'elle ne prend un sens qu'en étant corrélée à d'autres : « les erreurs sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une connaissance ancienne qui a réussi dans tout un domaine d'actions » [Brousseau, 1983]. C'est pourquoi, il semble nécessaire de se placer dans un contexte plus large afin de mieux cerner le type d'erreur et être capable de l'analyser pour plus tard, tenter d'y remédier.

### **2.1.3 Comment tenir compte des autres erreurs ? Comment les modéliser ?**

Ainsi, considérant qu'il y a interdépendance entre les erreurs, nous rejoignons l'hypothèse de Vergnaud concernant l'apprentissage des concepts : « Il est nécessaire pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des *champs conceptuels*. Étudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens » [Vergnaud, 1990].

La théorie des champs conceptuels offrant un cadre judicieux pour « comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances » [Vergnaud, 1990], elle paraît judicieuse pour

le cadre de notre recherche de modélisation des connaissances. Nous allons expliquer quelques outils qu'il utilise pour décrire les connaissances d'un apprenant :

- Construit par le chercheur, un *schème* décrit « l'organisation invariante de la conduite [d'un sujet] pour une classe de situation donnée. »
- Un schème est constitué d'*invariants opératoires*, qui sont construits par l'apprenant même si celui-ci n'est généralement pas capable de l'exprimer tel quel :
  - \* Les *théorèmes-en acte*, d'une part, qui sont tenus pour vrais par l'apprenant mais peuvent être faux -pour le mathématicien-. Ils sont représentatifs de connaissances locales ils peuvent se distinguer par leur domaine de validité restreint ou par une similitude à une connaissance correcte (par exemple, l'égalité  $(a+b)^2 = a^2+b^2$  expliquée par la prédominance des fonctions linéaires utilisées dans l'enseignement).
  - \* Les *concepts-en acte*, d'autre part, qui n'ont pas de valeur de vérité.

La production d'une réponse erronée peut être due à, par exemple, l'utilisation d'un théorème-en-acte hors de son domaine de validité ou à l'application d'un concept-en acte. Ces invariants opératoires sont donc une réponse à notre recherche de modélisation des erreurs.

Aussi, pour notre travail, après avoir modéliser informatiquement les erreurs observables, essayerons nous d'établir une typologie de schèmes -fondés sur notre propre interprétation-, représentatifs, à notre sens, des comportements des élèves dans le calcul littéral.

La question à laquelle nous allons essayer de répondre maintenant réside en la description des manières de modéliser en informatique l'apprenant -question 3-, en concordance avec notre choix de perspective constructiviste de l'apprentissage.

## **2.2 Modélisation informatique de l'apprenant**

Après avoir rappelé quelques grands jalons de l'histoire des différents prises en compte de l'apprenant, nous nous intéresserons au diagnostic, moyen adéquat de placer l'apprenant au coeur du dispositif informatique.

### **2.2.1 Les grands courants.**

La problématique informatique liée à l'enseignement, s'est rapidement recentrée sur l'apprentissage. L'importante distinction des différents environnements réside dans le degré de flexibilité au sein de l'interaction entre l'élève et le programme.

Une première catégorie est basée principalement sur la *représentation des connaissances*. Ainsi en est-il de SCHOLAR en géographie [Carbonell, 1970], où « la connaissance représentée dans des "structures d'information" était utilisée non seulement pour être présentée, pour déterminer des questions à poser à l'apprenant et pour vérifier ses réponses, mais aussi pour répondre à des questions de ce dernier non explicitement prévues à la conception du système » [Baron, 1995].

Viennent ensuite, dès le milieu des années 70, les tutoriels fondés sur *le modèle de*

*l'élève* : le modèle de recouvrement (overlay model -expertise partielle- avec WUSOR), ou le modèle des erreurs, dont nous donnons deux exemples fondateurs :

- \* BUGGY [Brown et Burton, 1978], où l'erreur ("bug") correspond à une règle incorrecte,
- \* REPAIR THEORY [VanLehn, 1980], où l'erreur est vue comme une "tentative de réparation". « When incomplete knowledges leads to an *impasse*, that is, a point where a necessary action violates a constraint, they attempt a *repair*, that is, a local piece of problem solving that will allow them to continue in spite of the *impasse* » [Wenger 1987], pp 166.

Ces tutoriels s'appuient sur une vision constructiviste de l'apprentissage -cf. 2.1- : l'apprenant est vu comme constructeur de ses connaissances en interaction avec un milieu (au sens didactique du terme), pouvant être plus large que le seul tutoriel : la conception, que se crée alors l'apprenant, peut être caractérisée comme une « propriété émergente des interactions au sein du système [Sujet<math>\leftrightarrow</math>Milieu] » [Balacheff, 2002]. Dans cette approche, on attribue à l'apprenant une variante fautive d'une connaissance globale et experte.

Un autre courant qui apparaît simultanément repose, quant à lui, sur le *module pédagogique* (comme en mathématiques, WEST [Burton et Brown, 1979] , LOGO [Papert, 1980] ou encore ALGEBRALAND [Brown, 1983]) avec une prise en compte de l'importance de l'interface.

Comme le précisent Mendelsohn et Dillenbourg, la qualité d'un tutoriel réside certainement en la combinaison performante de ces quatre points -représentation des connaissances, modèle de l'élève, module pédagogique et interface- même si pour des raisons techniques, un projet de recherche se voit souvent obligé de concentrer son approfondissement sur un seul de ces axes [Mendelsohn & Dillenbourg, 1991].

Pour notre étude, nous avons précisé que nous nous appuyons sur les théories constructivistes de l'apprentissage, qui soulignent l'importance de l'activité du sujet dans la construction des connaissances. Au niveau informatique, en adéquation avec cette approche, la connaissance est caractérisée par l'état d'équilibre entre Action et Rétroaction, entre Sujet et Milieu. Changement d'état de l'action d'un individu agissant sur son environnement, apprendre consiste à être capable d'agir nouvellement. D'où l'intérêt d'avoir une représentation des connaissances d'un apprenant pour en lire son évolution ; le cadre est placé mais il reste à choisir un moyen informatique de modélisation du comportement de l'élève.

### **2.2.2 le diagnostic, comme réponse à notre demande de modélisation de l'apprenant.**

Les rétroactions proposées par un logiciel classique se réduisent, souvent, à des feedback simples, en réponse à l'erreur que l'élève a commise, ou par des exercices de niveau gradué. Or, plus les informations concernant le comportement de l'élève seront importantes –en terme de quantité et de qualité–, plus la remédiation pourra être judicieuse. Rappelons les termes de Mendelsohn à propos d'un moyen pertinent de modélisation : le diagnostic, interprète du comportement de l'élève.

« Les concepteurs de tutoriels ont comme ambition d'améliorer cette prise d'information, limitée généralement dans les environnements classiques à une réponse ou quelques seuls

paramètres quantitatifs. Cette amélioration est réalisée en construisant en quelque sorte un portrait des connaissances de l'élève qui s'enrichit à chaque étape de l'apprentissage. Ce portrait porte le nom de *modèle de l'élève*<sup>13</sup>. [...] Le modèle de l'élève sert ainsi à construire un *diagnostic*<sup>13</sup> qui pourra servir au système pour prendre une décision de nature didactique (questionnement, explications, remédiation...) » [Mendelsohn & Dillenbourg, 1991].

Cependant, nous ne pouvons pas nier la difficulté – à la fois didactique et informatique – de modéliser finement les comportements souvent instables d'un apprenant. Il y a là, comme le préconise Baron [Baron, 1995], recherche de compromis entre prises d'informations et modélisation. Ce problème de niveau de granularité soulève une autre question : celui de la fidélité entre modèle(s) et comportement réel de l'élève, comme l'explique Balacheff dans [Balacheff, 1994] à travers un schéma :

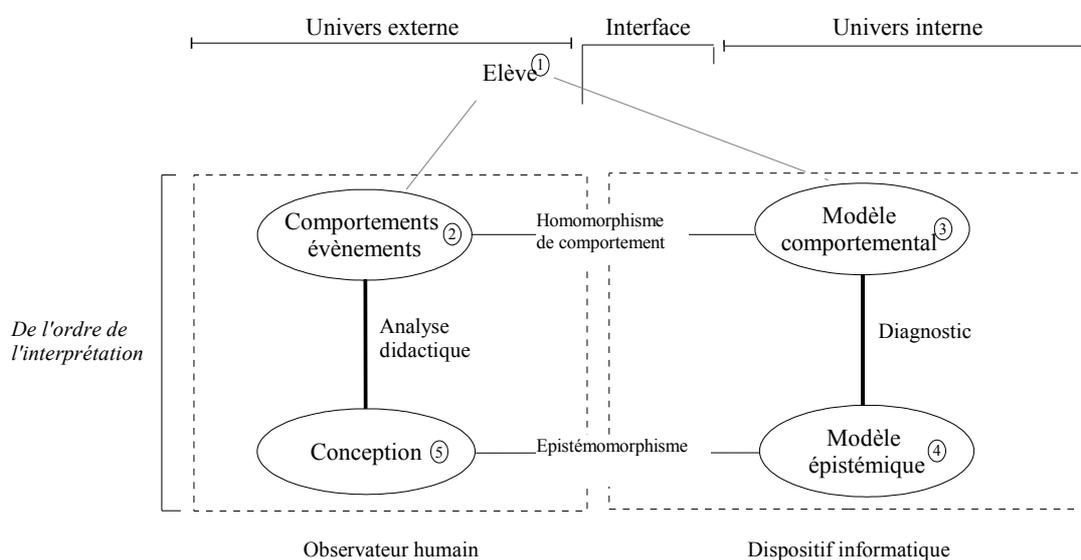


schéma 3  
Constructions humaines et informatiques de modélisation

\* Les *événements* (2) représentent les observables<sup>14</sup> pertinents aux yeux de l'observateur humain du réel comportement (1) de l'élève.

Les conceptions, le modèle comportemental et épistémique sont aussi des constructions humaines, interprétations des événements perçus (2) :

\* les *conceptions* (5) sont décrites manuellement par un didacticien au vu du comportement de l'élève dans le monde extérieur.

\* le *modèle comportemental* (3) est une première interprétation informatique des événements (2).

\* le *diagnostic* -automatique-, fondé sur le modèle comportemental fournit un *modèle épistémique* (4).

13 Expressions non en italique dans le texte d'origine.

14 Par observables, nous entendons comportements accessibles à travers une certaine formulation verbale, écrite, comportementale de l'élève.

La problématique, - outre les choix de modélisation comportemental et épistémique - réside en ce qu'appelle Balacheff *l'homomorphisme de comportement et l'épistémomorphisme* : la fidélité entre la représentation interne et le comportement de l'élève et celle, respectivement, entre le modèle épistémique et le résultat de l'analyse didactique.

### **2.3 Troisième conclusion**

La question 2 a trouvé, en partie, réponse par le choix de la considération constructiviste de l'apprenant : la prise en compte de l'erreur est, pour nous, nécessaire pour rendre possible une évolution positive de la connaissance. Il reste donc à vérifier que Aplusix concorde avec cette approche de l'apprentissage.

En adéquation avec cette approche, le diagnostic répond au besoin d'un outil informatique de modélisation de l'apprenant, question 3. Cependant, plus précisément, au sein de l'environnement informatique choisi -Aplusix-, la problématique, soulevée par Balacheff, quant à la fidélité entre modélisation informatique et modélisation construite extérieurement, mérite d'être explicitée. Aussi est soulevée la question suivante :

question 4 *Quel est le modèle comportemental au sein d'Aplusix ? et quelle en est sa fidélité avec des observables extérieurs ?*

En outre, notre expérimentation se situant au niveau du modèle épistémique, la question de la pertinence de la relation entre ce modèle et celui des conceptions nous intéresse particulièrement. Elle peut être reformulée ainsi :

question 5 *Dans quel type de modélisation épistémique se placent le projet Aplusix et notre expérimentation ?*

question 6 *Quelle en est sa fidélité par rapport à un modèle construit par un didacticien extérieur ?*

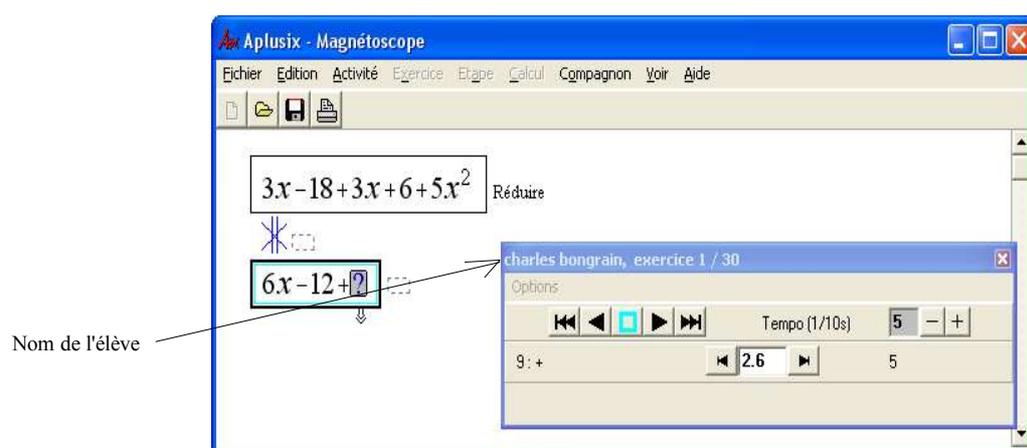
La question 4 ainsi qu'un début de réponse à la question 5 seront abordés dans le paragraphe suivant, puisqu'il y est détaillé le fonctionnement interne d'Aplusix ; nous poursuivrons, dans la partie III, cette description de la modélisation épistémique et nous y comparerons diagnostic automatique et analyse manuelle afin de répondre à la question 6.

### **2.4 Au sein d'Aplusix**

Afin d'adapter dynamiquement et individuellement des interventions du système, il faut, comme le rappelle Balacheff, « identifier et interpréter les comportements de l'élève, observés à l'interface du dispositif informatique » et pour cela, « intégrer des fonctions de reconnaissance et de diagnostic » [Balacheff, 1994]. Le logiciel Aplusix se place dans cette recherche puisque, à terme, il souhaite remédier aux conceptions erronées des élèves dans le domaine de l'algèbre. Pour répondre à cette attente, deux dispositifs ont été mis en place : le magnétoscope et le logiciel Anais, dont une description suit ci-dessous.

### 2.4.1 Le magnétoscope

Après une séance d'utilisation d'Aplusix, des protocoles d'élèves<sup>15</sup> peuvent être recueillis sous la forme d'un fichier texte. Celui-ci, lisible par le magnétoscope ou avec un tableur, retrace les micro-actions de chaque élève - actions de la souris ou événements du clavier - : création d'une nouvelle étape, sélection, modification ou suppression d'une partie de l'expression algébrique, etc. La production de chaque élève peut être "rejouée" étape par étape, à temps constant entre deux actions, ou encore en temps réel, précisant ainsi le temps de réflexion entre chaque micro-action.



Document 7  
En mode magnétoscope

Pour Balacheff, la prise en compte de l'apprenant est « représentée par le niveau de granularité choisi pour la description des comportements » [Balacheff, 1994], pp.28. Or, dans l'environnement Aplusix, ce niveau est caractérisé par ce qui est conservé grâce au magnétoscope de la production de l'élève, à savoir le temps et les micro-actions. Ceci donne, par conséquent, une première représentation du modèle comportemental choisi par Aplusix. La seconde est constituée par le fichier sur lequel se base le logiciel de diagnostic Anais. Celui-ci ne conserve que les étapes validées par l'élève, les corrections, les hésitations et le temps ayant été mis de côté. Ce sont ces observables, plus restreints, que nous appellerons *protocoles* dans la suite.

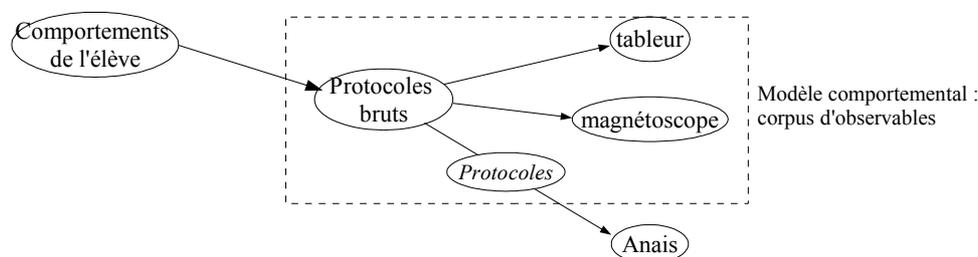


schéma 4  
Ensemble des historiques de productions et des protocoles résultant

15 « Ensemble de données comportementales recueillies dans des situations où un sujet est engagé dans une activité cognitive complexe » [Nicaud, 2004].

Pour une comparaison de trace brute et de protocole dans l'environnement Aplusix, Cf Annexe 3, pp66.

Ainsi, dans un premier temps, un corpus d'observables est construit, produit d'un découpage et d'interprétations, constituant le modèle comportemental du schéma 3. Nous ne nous interrogerons pas plus longuement sur ce modèle comportemental et sur la problématique de l'homomorphisme du comportement - à savoir la relation qu'entretiennent actions de l'élève dans Aplusix et comportement réel de l'élève - car ils ne représentent qu'un outil, une base de données pour le diagnostic automatique, sur lequel porte notre travail.

Dans un second temps, il faut construire un modèle de connaissances, seconde interprétation, à travers une réorganisation du "réel". Cet ensemble d'informations sur l'état des connaissances de l'apprenant, est, à nouveau, un modèle théorique du chercheur et non ce qui est réellement dans la tête de l'élève.

#### **2.4.2 Anais**

Pour répondre à la question 5 - des précisions suivront dans la partie III -, nous allons, après avoir présenté Anais, classer ce logiciel de diagnostic selon quatre critères que propose Baron [Baron, 1995], qui nous permettront de résumer la modélisation épistémique choisie par Aplusix :

- le mode : en-ligne tel que IDEBUGGY -ce processus de diagnostic supposant des temps d'exécution extrêmement rapides- ou hors-session ?
- les données d'entrées traitées : prise en compte du résultat final ou de traces détaillées de raisonnement ?, les données concernent-elles un exercice ou un ensemble de tests ?
- les sorties visées : quels types de connaissances et quel modèle d'apprenant ?
- les techniques employées pour inférer les sorties à partir des entrées : techniques de comparaison des comportements de résolution de l'apprenant et du résolveur, techniques de "perturbation" du résolveur, pour en obtenir une variante plus ou moins partielle ou erronée telles que la reconnaissance de plans ou d'intentions, associées à une modélisation du comportement de résolution en terme de planification ou techniques d'apprentissage ainsi que des approches de "diagnostic à base de modèles".

La modélisation épistémique des connaissances de l'élève dans l'environnement Aplusix est constituée de règles de réécriture, d'une part, et du diagnostic, d'autre part, qui précise quel type de règle a pu utiliser l'élève lors de telle résolution d'exercice. Un degré supérieur de modélisation peut être atteint en regroupant les règles permettant de faire émerger des conceptions. Nous allons détailler, maintenant, ces deux premières formes de modélisation, le niveau conceptuel n'étant abordé que dans la partie IV.

##### **2.4.2.1 Les règles**

Les règles sont des modélisations des observables, transformations qu'effectue l'élève ; elles sont des interprétations des comportements locaux.

Concrètement, une règle R est un mécanisme de transformation d'une expression A pour produire B. En ce sens, l'opérateur de raisonnement est "orienté", à la différence des identités habituelles du calcul algébrique, puisque B ne peut pas produire A, à moins qu'une nouvelle règle ne soit implantée. La règle R s'applique à une transformation  $E \rightarrow F$  si A peut être unifiée à une sous-expression de E et selon le genre de la règle R, B peut alors être produit soit indépendamment de F (1) soit en tenant compte de F : dans ce dernier cas, B peut n'être produit que si elle est une sous expression de F (2) ou si des conditions sur F sont vérifiées (3).

En voici trois exemples :

1. Règle de réécriture, indépendante du but	2. Règle avec contraintes sur le but	3. Règle avec comparaison au but
<p>Transforme <math>7x^2x</math> en <math>14x</math></p> <p>{[nom ER_PerteCarre_Produit4facteurs] [sorteDe ER_xx_vaut_x_Red] [Com "nx*px --&gt; (n*p)x"] [statut errone] [reecriture &lt;&lt; ab --&gt; d &gt;&gt;]</p> <p>[si ((a CoefRationnelCorps n x) (EstVariable x) (b CoefRationnelCorps p y) (EstVariable x) (=AC x y))]</p> <p>[alors (soit d (EnProduit (MultiplierRationnel n p) x)))]</p> <p>[NiveauAbstraction {[ModeleA Fin]}]</p>	<p>Transforme <math>7*(2x+3)</math> en <math>14x+3</math></p> <p>{[nomER_a_Fois1erDeSomme] [sorteDe ER_Distribution] [Com "distribution sur 1<sup>er</sup> terme somme"] [statut errone]</p> <p>[si ((?e SousExpression ?source APourOperateur multiplier) (?source NbArguments 2) (?source Argument1 a) (?source Argument2 b) (b APourOperateur plus) (b Argument1 c) (soit ?resultat (RemplacerSousExpression b ?#c (EnProduit a c))  (soit v (ExpressionDePosition ?but ?#source)) (v APourOperateur ?o2) (?resultat APourOperateur ?o1) (= ?o1 ?o2) (= (NombreParentheses v) (NombreParentheses ?resultat)))]</p> <p>[alors (RemplacerSousExpression ?e ?#source ?resultat)]</p> <p>[NiveauAbstraction {[ModeleA Fin]}]</p>	<p>Transforme <math>2+3x</math> en <math>5</math></p> <p>{[nom ER_constantePlusVariableDonneConstante] [sorteDe ER_Somme_MonomesDegreDifferent] [Com "k+ax-&gt;k+a,"] [statut errone]</p> <p>[si ( (?e SousExpression ?f APourOperateur plus) (?f Argument a) (?f Argument b) (&lt;&gt; ?#a ?#b) (a CoefRationnelCorps n u) (= u 1) (u degreFormel k) (b CoefRationnelCorps p v) (ou (EstVariable v) (v APourOperateur Puissance)) (soit ?sousbut (ExpressionDePosition ?but ?#f))  (soit ?l2 (listeTermesAdditifsDegreK ?sousbut k)) (soit-un ?resultat ?l2) (?resultat CoefRationnelCorps q w) (= w 1) (= (ValeurApprochee q) (+ ValeurApprochee n (ValeurApprochee p) ))]</p> <p>[alors ((soit ?source (EnSomme a b)) (soit z (RemplacerSousExpression ?f (p_p_p_e ?#a ?#b ?f) ?resultat))  (RemplacerSousExpression ?e ?#f z))]</p> <p>[NiveauAbstraction {[ModeleA Fin]}]</p>

Document 8

La règle 1 est indépendante du but : de  $nx*px$ , elle produit  $npx$ ;  
Par exemple, elle s'appliquera à  $2x*3x \rightarrow 6x$  mais aussi à  $2x*3x \rightarrow 6x^3$

La règle 2 ne s'applique que SI l'expression finale dans le but a le même opérateur et le même nombre de parenthèses que l'expression produite par la règle;

Par exemple, la règle 2 peut s'appliquer à  $2(x+1) \rightarrow 2x+1$  mais pas à  $2(x+1) \rightarrow (2x+1)$  car cette règle devrait produire  $2x+1$  et comparé à  $(2x+1)$ , les opérateurs ne sont pas les mêmes (plus pour la première et parenthèse pour la seconde).

La règle 3 ne s'applique que SI le résultat, que pourrait produire la règle, se trouve dans le but.  
Par exemple, elle peut s'appliquer à  $2*(2+3x) \rightarrow 2*5$  mais pas à  $2*(2+3x) \rightarrow 4+6x$

Rappelons la définition de Nicaud : « Nous appelons règle de transformation, une règle

permettant d'effectuer des remplacements au deuxième niveau sémantique<sup>16</sup>, c'est-à-dire en conservant les fonctions » [Nicaud, 1994]. Ces règles dites « erronées » produisent donc, lorsqu'elles sont appliquées, une erreur, qui, idéalement, représente l'erreur effectuée par l'élève.

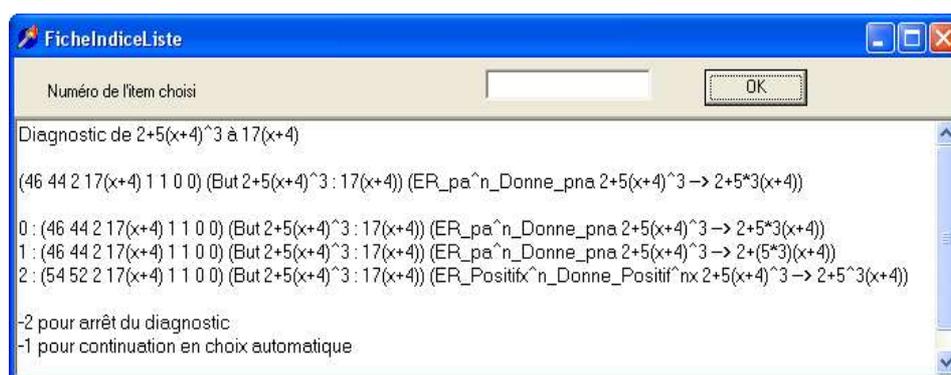
### 2.4.2.2 L'algorithme de diagnostic automatique

Le logiciel Anais a été développé pour analyser les productions des élèves. Il utilise pour cela une base des règles décrites ci-dessus, en tentant de trouver le meilleur enchaînement -dans un sens que nous allons préciser ci-après- de ces règles (correctes ou erronées) entre deux expressions<sup>17</sup> données.

Par exemple, pour passer de la source<sup>17</sup>  $2+5(x+4)^3$  au but<sup>17</sup>  $17(x+4)$ .

Basé sur la recherche heuristique, ce logiciel est contraint par une fonction qui calcule une "distance" entre ces deux expressions mathématiques :

- Partant de la source, il propose toutes les règles possiblement applicables à cette expression, en tenant compte du but<sup>18</sup>.



Document 9

Trois règles sont applicables à la transformation  $2+5(x+4)^3 \rightarrow 17(x+4)$

- Chaque règle applicable produit un nouveau noeud et Anais construit ainsi, de proche en proche, un arbre de possibilités.

- La sélection d'un chemin, pour accéder au but, se base sur le coût<sup>19</sup> le plus faible entre tous les chemins possibles.

16 Il distingue trois niveaux sémantiques possibles [Nicaud, 1994] : un *premier* niveau est constitué par la capacité à donner du sens à une expression -substituer une valeur numérique au sein d'une expression algébrique et la calculer effectivement-; un *second*, qui regroupe les exercices de "savoir-faire" et d'application des règles d'égalité « universellement quantifiées » (telles que celles du développement ou factorisation). Le *troisième* niveau, requis pour l'acquisition globale de l'algèbre, demande de maîtriser les concepts construits sur les objets algébriques : par exemple, les exercices où un plan de résolution doit être établi, où un raisonnement algébrique est nécessaire se placent à ce troisième niveau.

17 Expressions validées par l'élève, apparaissant dans les protocoles.

18 Certaines règles ont des conditions d'application, qui tiennent compte du but.

19 Le coût du diagnostic tient compte du nombre de règles utilisées corrélaté avec leur statut (général, résolution, erroné -perte, erreur- ou semi-correct). Ces coûts sont paramétrables.

```

SIM
Fichier Edition Voir Afficher ECR Trace Diagnostic
Diagnostic No 1, coût=8 (transformation ERRONEE)
BUT : 2+5(x+4)^3 --> 17(x+4)
transformation : 5(x+4)^3 --> (5*3)(x+4)
  >>> par la règle ER_pa^n_Donne_pna : convention notation a^n incomprise
  | SorteTache : Reduction
  | RegleAbstraite : ER_Puissance
  | RegleFine : ER_pa^n_Donne_pna
  | RegleSIM : ER_pa^n_Donne_pna
  | Statut : ERRONE
  | Source : 5(x+4)^3 (multiplier polynome)
  | Resultat : (5*3)(x+4) (multiplier polynome)
expression obtenue : 2+5*3(x+4)

transformation : 5*3 --> 15
  >>> par la règle RES_MultiplierEntier : calcul du produit de 2 entiers
  | SorteTache : Reduction
  | RegleAbstraite : Arithmetique
  | RegleFine : MultiplierNombre
  | RegleSIM : RES_MultiplierEntier
  | Statut : CORRECT
  | Source : 5*3 (multiplier numerique)
  | Resultat : 15 (nat numerique)
expression obtenue : 2+15(x+4)

transformation : 2+15(x+4) --> 17(x+4)
  >>> par la règle ER_AdditionPrioritaireParenthese : a+b(Q) --> (a+b)Q; a et b rationnels, Q quelconque
  | SorteTache : Reduction
  | RegleAbstraite : GroupementAdditif
  | RegleFine : ER_AdditionPrioritaireParenthese
  | RegleSIM : ER_AdditionPrioritaireParenthese
  | Statut : ERRONE
  | Source : 2+15(x+4) (plus polynome)
  | Resultat : 17(x+4) (multiplier polynome)

*****
6 diagnostics de coûts : (8 12 17 17 17 17)
Pour les voir, utiliser les fonctions vd (pour VoirDiag) et vd+ avec le No de diag
exemples : (vd 2) (vd 2 4) (vd+ 2) (vd+ 2 4)
*****

```

Document 10

*Le chemin retenu pour passer de  $2+5(x+4)^3$  à  $17(x+4)$  est constitué d'une succession de 3 règles : deux erronées (ER\_pa^n\_Donne\_pna et ER\_additionPrioritaireParenthese) et une correcte (RES\_MultiplierEntier); Le coût est de 8; 5 autres diagnostics sont aussi proposés de coûts allant de 12 à 17.*

Lors du lancement d'Anais, deux types de résultat sont envisageables : un diagnostic ou un échec. Cet échec correspond à une distance trop importante entre les noeuds et le but. Il peut aussi être dû à une trop grande restriction du nombre de noeuds possibles, nombre paramétrable : le nombre de développements permis avec des règles correctes peut-être différent de celui des règles erronées.

Répondons maintenant, en partie, -des précisions seront apportées dans la partie III- , en résumant ce qui précède, à la question de la modélisation de l'apprenant, à travers la classification de Baron à propos des diagnostics automatiques :

- le *mode* est hors-session : Aplusix exploite les traces du comportement de l'élève après la récupération des protocoles et non au fur et à mesure des interactions.
- les *données d'entrées traitées* sont constituées de deux types de traces relativement détaillées : l'une, par le magnétoscope et l'autre par les protocoles, recueils d'historiques sur des batteries d'exercices.

- les *sorties visées* : on répond ici plus particulièrement au type de modélisation épistémique. Le logiciel Anais permet, à la fois, de diagnostiquer des types de règles -comme le projet BUGGY car tous deux tentent de reproduire le comportement de l'élève avec un raisonnement interne et proposent une *explication* des procédures *réellement* utilisées par l'élève- mais aussi, à un niveau supérieur et restreints à certains domaines, des théorèmes-en-acte utilisés par les élèves, comme cela a déjà été fait pour le domaine des équations [Nicaud, 2004, pp.68].
- la *technique employée pour inférer les sorties à partir des entrées* est complexe : Anais reconnaît une succession d'actions par des techniques de recherche heuristique pour produire un diagnostic tandis qu'il a une approche de "diagnostic à base de modèles" pour construire la carte de conceptions dans le domaine des équations.

Ainsi, que ce soit la récupération informatique d'informations pertinentes ou son analyse automatique des comportements, toutes deux entraînent, inévitablement, pour leur modélisation, une interprétation des données par les choix humains didactiques et les contraintes informatiques. Avec le type de modélisation qu'a choisi Aplusix, à travers le magnétoscope et Anais, nous restons dans l'approche constructiviste de notre cadre théorique de prise en compte de l'apprenant, comme l'exprime Wenger : « The idea of a diagnostic model assumes that, in problems that require procedural skills, mistakes are due to the correct execution of an incorrect procedure, and not to an inability to follow an otherwise correct procedure. » [Wenger 1987]

## **2.5 Quatrième conclusion**

Pour analyser et interpréter les erreurs des élèves, nous avons décidé de nous référer au cadre théorique de Vergnaud, théorie « de la conceptualisation du réel », modèle qui nous paraît être le plus pertinent pour modéliser les connaissances des apprenants puisqu'il la définit comme « une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques » [Vergnaud, 1990]. Cette modélisation et la conception constructiviste de l'apprentissage qui en découle sont prises en compte dans l'analyse didactique des protocoles, construits dans l'environnement informatique Aplusix, et dans la construction des règles de l'algorithme de diagnostic. Dans ce but, nous faisons l'hypothèse de travail que l'élève est cohérent et rationnel dans le sens où les réponses qui nous intéressent mobilisent une certaine conception locale, qui, elle, au contraire, peut ne pas être cohérente au sens des mathématiques.

De plus, les *traces*, construites dans Aplusix, sont *représentatives d'un processus de raisonnement de l'élève*. Certes, l'homomorphisme n'est pas parfait puisque le modèle d'Aplusix ne rend pas compte, par exemple, d'une discussion ou d'un geste. Cependant, le magnétoscope permet de valider le fait que ces traces rendent compte *fidèlement* de ce que l'élève a rendu explicite au niveau de la machine.

Quant au modèle épistémique, fondé sur le modèle comportemental, il réside en un *diagnostic automatique*, Anais, qui produit des règles, interprétations des transformations de l'élève.

Nous allons détailler, dans la partie suivante, la construction de ce diagnostic, finissant ainsi de répondre à la question 5 - Dans quel type de modélisation épistémique se placent le projet Aplusix et notre expérimentation ? - et tenter de répondre à la question 6 - Quelle en est sa fidélité par rapport à un modèle construit par un didacticien extérieur ? -

### III. DIAGNOSTIC D'ERREURS EN CALCUL LITTÉRAL

#### 3.1 Présentation des protocoles

Notre travail s'inscrit dans le cadre du projet « Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique » [Nicaud et al, 2005]. Consistant en une analyse de protocoles, puis, en une programmation informatique des interprétations qui en découlent, afin d'aboutir à une modélisation en termes de conceptions des élèves, notre travail a demandé des compétences à la fois didactiques et informatiques. Lorsque celui-ci faisait appel à des connaissances informatiques importantes, le travail était alors réalisé par J.F. Nicaud, le concepteur-développeur d'Anais.

Les protocoles, sur lesquels nous avons fondés notre analyse appartiennent au groupe d'expérimentations EXP-92 du projet précité et plus précisément EXP-Paris, qui se sont déroulées en 1992, dans des classes de 4<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 2<sup>nd</sup>e, et 1<sup>re</sup> françaises, sans aide mathématique de la part des enseignants [Nicaud et al, 2005]. La première partie du travail, conduisant à la construction manuelle des règles, a porté sur six classes en particulier, trois 4<sup>e</sup> et trois 3<sup>e</sup>, sur un test composé de 31 exercices<sup>20</sup> dont 10 qui concernent le développement proprement dit d'expressions polynomiales à coefficients entiers<sup>21</sup>. Dans ces exercices, seules la manipulation formelle et la capacité à exécuter des algorithmes simples sont "testées" : des tâches techniques dans le registre algébrique, d'ordre *syntaxique* et *sémantique* -de deuxième niveau<sup>16</sup> dans le sens de J.F. Nicaud- et non des raisonnements ou modélisation de problèmes.

#### 3.2 Quelques précautions

Ce qui est appelé *erreur* est, comme nous l'avons précisé précédemment, une réponse reproductible et en lien avec d'autres erreurs mais c'est une notion temporelle, locale et de surcroît, en mouvement. C'est pourquoi, elle est susceptible de plusieurs analyses, de différentes interprétations et il faudrait en vérifier chaque hypothèse par de nouvelles investigations plus précises, ce que nous n'avons pas pu réaliser à ce stade.

<sup>20</sup> cf. Annexe 5

<sup>21</sup> Afin de réduire la complexité du champ d'étude, seules les polynômes à coefficients *entiers* ont été étudiés : La maîtrise des fractions est difficile à acquérir pour un élève de collège, l'on peut se demander, alors, quel type d'erreurs on aurait pu trouver en analysant des expressions à coefficients fractionnaires, quels comportements auraient été révélés ? Cette question reste une perspective de recherche.

De plus, certaines caractéristiques de l'apprenant, telles que physiques, sociologiques ou encore psychologiques, ne sont pas prises en compte, non par rejet mais par besoin de limiter le domaine d'étude. Citons, cependant, Nimier expliquant la perception des mathématiques par l'élève : « Un vécu affectif très important est lié aux mathématiques et l'inconscient s'en sert parfois pour faire un objet dangereux. Ainsi certains élèves vont jusqu'à mettre en place un système de défense qui consiste à désirer inconsciemment échouer en mathématiques. » [Nimier, 1976]

### **3.3 Méthodologie**

Brousseau préconise une méthode d'identification des erreurs : « organiser l'observation, soit en proposant les problèmes correspondants à des cohortes d'élèves, soit en suivant la chronique d'un apprentissage scolaire. Les deux méthodes sont expérimentales et utilisent la modélisation » [Brousseau, 2000]. Notre démarche, qui s'est construite au fur et à mesure de notre avancée dans la recherche de modélisation, se place dans le premier type d'organisation. Elle se situe dans le cadre de la modélisation épistémique du schéma 3 et est constituée de deux principales étapes :

- \* identifier les transformations erronées par une analyse de protocoles individuels (A),
- \* progresser le long d'une spirale composée du codage des règles en langage informatique (B) et de leur analyse avec affinage du diagnostic automatique (C).

Ci-dessous une représentation schématique de notre démarche :

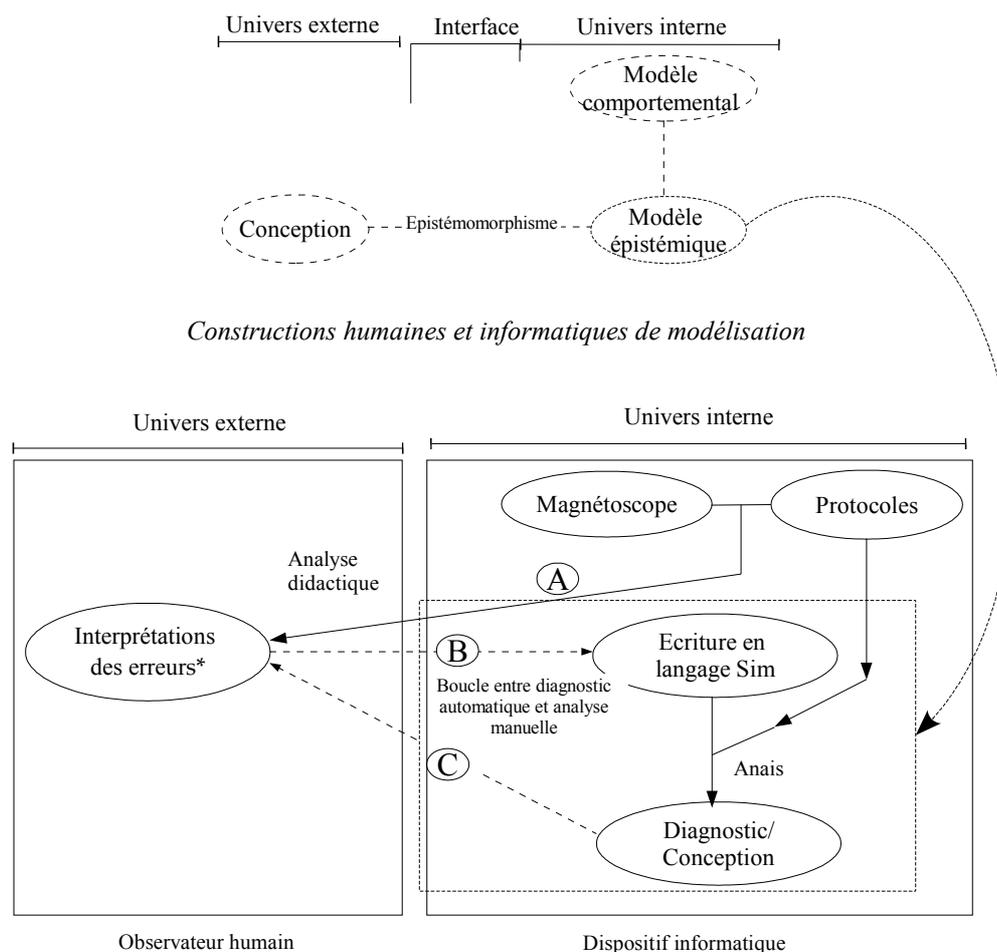


schéma 5  
Représentation de la structure de notre méthodologie

\* Erreur prise au sens de Brousseau, comme un écart à une réponse attendue -cf. paragraphe 2.1.2-.

En détaillant ces étapes, nous continuerons ainsi à préciser quelle représentation épistémique de l'élève nous construisons, cf. question 5, et à nous questionner sur l'épistémomorphisme, cf. question 6.

### 3.3.1 Analyse de protocoles individuels ; (A)

« Faire une Analyse de protocoles individuels, c'est élaborer une interprétation d'un protocole. Idéalement cette interprétation aboutit à la création d'un modèle pour lequel l'ajustement des paramètres permet de simuler individuellement les comportements. C'est une analyse à un niveau fin, dans la mesure où les actions sont prises en compte au niveau individuel et à un niveau élémentaire » [Nicaud et al, 2005]. Cherchant l'exhaustivité des règles erronées et dans la perspective d'un diagnostic automatique, nous nous sommes restreints, dans un premier temps, à l'analyse manuelle des comportements de seulement deux classes : une classe de 4<sup>e</sup> et une de 3<sup>e</sup>. Nous avons cherché à identifier les transformations -erronées uniquement, puisque les règles correspondant aux transformations correctes avaient été écrites auparavant pour la gestion des tâches de

résolution- utilisées par les élèves, au vu de leurs productions, via le magnétoscope ou les protocoles, selon le besoin de granularité.

\* En effet, le magnétoscope permet d'avoir accès à la sphère privée de l'élève, plus que ne le permettent les protocoles ou même le cadre papier/crayon : ce que l'élève accepte comme étape intermédiaire, visible aussi dans les protocoles, mais surtout ce qu'il efface, sont autant d'éléments précieux et apportent des précisions considérables quant aux modélisations des transformations. Ainsi, avons nous régulièrement vérifié nos hypothèses d'interprétation à l'aide du magnétoscope et par des va-et-vient réguliers entre ces deux représentations des connaissances des élèves, nous avons eu une première trame de règles.

\* Il a également fallu "imaginer" les autres erreurs possibles, en déclinant les transformations erronées, repérées dans ces protocoles. Par exemple, l'erreur consistant à sommer les coefficients et les exposants d'un monôme de degré 1 et 2 revenait souvent :  $2x^2+5x \rightarrow 7x^3$  ; des transformations du type  $2+5x \rightarrow 7x$  ou  $2x+5x \rightarrow 7x^2$  paraissaient alors tout aussi envisageables et nous les avons intégrées comme des transformations possibles, même si elles étaient absentes des deux classes considérées. A charge d'Anais, de révéler si ces erreurs se manifestaient dans d'autres classes ou non.

Voici un extrait de notre première analyse des transformations erronées :

<p>Eleve Anne Développer, réduire et ordonner</p> <p>Étape 1, action 17, étape mère 0 BUT : <math>(9x-5)(-6x+2) \rightarrow -54x+18x+35x-10</math> transfo : <math>(9x-5)(-6x+2) \rightarrow 9(-6x)+(-5)(-6x)+2*9x+2(-5)</math> transfo : <math>9(-6x)+(-5)(-6x)+2*9x+2(-5) \rightarrow 9(-6x)+(-5)(-6x)+2*9x-10</math> SOUS-BUT : <math>9(-6x)+(-5)(-6x)+2*9x \rightarrow -54x+18x+35x</math> transfo : <math>9(-6x)+(-5)(-6x)+2*9x \rightarrow -9*6xx+5*6x+35x</math> SOUS-BUT : <math>-9*6xx+5*6x \rightarrow -54x+18x</math> transfo : <math>-9*6xx+5*6x \rightarrow -9*6x+5*6x</math> transfo : <math>-9*6x+5*6x \rightarrow -54x+5*6x</math> SOUS-BUT : <math>5*6 \rightarrow 18</math> transfo : <math>5*6 \rightarrow 18</math> But atteint</p> <p>Étape 2, action 23, étape mère 1 BUT : <math>-54x+18x+35x-10 \rightarrow -x-10</math> SOUS-BUT : <math>-54x+18x+35x \rightarrow -x</math> transfo : <math>-54x+18x+35x \rightarrow -19x+18x</math> transfo : <math>-19x+18x \rightarrow -x</math> But atteint</p>	<p>3ème 1 <math>(9x-5)(-6x+2)</math></p> <p>transformation ERRONEE</p> <p><math>2(-5) \rightarrow -10</math></p> <p><math>2*9x \rightarrow 9(-6x)+(-5)(-6x)+35x</math></p> <p><math>xx \rightarrow x</math> <math>9*6 \rightarrow 54</math></p> <p>Développement <b>Bad</b></p> <p>transformation correcte</p> <p><math>-54x+35x \rightarrow -19x</math></p> <p>Reduction <b>OK</b></p>	<p>Sainte Elisabeth 19/11/02</p> <p>(diag &lt;&lt;<math>(9x-5)(-6x+2) \rightarrow -54x+18x+35x-10</math>&gt;&gt;)</p> <p>distribution d'une somme sur une somme calcul du produit de 2 entiers</p> <p>groupement multiplicatif erroné, ex: <math>2*3x \rightarrow 5x</math></p> <p><math>xx \rightarrow x</math> calcul du produit de 2 entiers</p> <p>Produit erroné, ex: <math>2*3 \rightarrow 5</math></p> <p>Perte exposant dans développement : <math>(ax+b)(cx+d) \rightarrow acx+bcx+adx+bd</math> suivie d'une erreur multiplicative : <math>6*5 \rightarrow 30</math> (diag &lt;&lt;<math>-54x+18x+35x-10 \rightarrow -x-10</math>&gt;&gt;)</p> <p>groupement additif, ex: <math>ax+bx \rightarrow (a+b)x</math> groupement additif, ex: <math>ax+bx \rightarrow (a+b)x</math></p>
<p>Eleve Anne Réduire et ordonner</p> <p>Étape 1, action 13, étape mère 0 BUT : <math>10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 \rightarrow 16x-9x^4</math> transfo : <math>10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 \rightarrow 10x+1-9x^2+5+6x-6</math> transfo : <math>10x+1-9x^2+5+6x-6 \rightarrow 10x-5-9x^2+5+6x</math> transfo : <math>10x-5-9x^2+5+6x \rightarrow 16x-5-9x^2+5</math> SOUS-BUT : <math>-5-9x^2+5 \rightarrow -9x^4</math> transfo : <math>-5-9x^2+5 \rightarrow -9x^2</math> SOUS-BUT : <math>2 \rightarrow 4</math> transfo : <math>2 \rightarrow 4</math> But atteint</p>	<p>3ème 1 <math>10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6</math></p> <p>transformation ERRONEE</p> <p><math>-6x^2-3x^2 \rightarrow -9x^2</math> <math>1-6 \rightarrow -5</math> <math>10x+6x \rightarrow 16x</math></p> <p>Reduction <b>Bad</b></p>	<p>Sainte Elisabeth 19/11/02</p> <p>(diag &lt;&lt;<math>10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 \rightarrow 16x-9x^4</math>&gt;&gt;)</p> <p>groupement additif, ex: <math>ax+bx \rightarrow (a+b)x</math> calcul de la somme de 2 entiers groupement additif, ex: <math>ax+bx \rightarrow (a+b)x</math></p> <p>termes qui s'annulent, ex: <math>ax-ax \rightarrow 0</math></p> <p>Changement de nombre</p> <p>Somme coefficients et exposants : <math>x^2 + x^2 = x^4</math></p>

Document 11

Exemple d'analyse manuelle des productions des élèves. Etude de deux exercices traités par l'élève Anne.

La première transformation  $(9x-5)(-6x+2) \rightarrow -54x+18x+35x-10$  est erronée,

diagnostiquée manuellement comme une Perte exposant dans un développement suivie d'une erreur de multiplication.

### 3.3.2 Spirale de mise en oeuvre : du codage à un diagnostic correct ; (B & C)

La seconde étape a été plus axée sur un travail d'informaticien : le but étant de programmer les transformations repérées sous la forme de règles, dont la structure a été expliquée dans le paragraphe 2.3.2.1., pour obtenir un diagnostic satisfaisant<sup>22</sup>.

Cette boucle peut être, elle même, décomposée en deux sous-parties :

- codage des règles en écriture SIM<sup>23</sup> : (B)

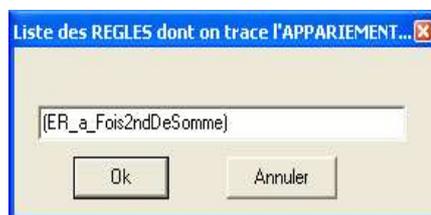
\* La programmation de ces règles est un mélange de méthode SIM<sup>23</sup> et de langage Pascal, selon la complexité de l'écriture : l'implantation se faisait en Pascal par J.F. Nicaud si le coût en SIM était trop élevé.

\* Lors du codage, des choix didactiques ont, également, été faits : privilégier une modélisation plutôt qu'une autre, rejeter certaines transformations trop spécifiques...

\* Après un premier codage, nous avons fait tourner ces règles sur des petits exemples puis sur des erreurs emboîtées, révélant parfois des modifications à effectuer, comme le montre le tableau ci-dessous :

<i>Pour tester la règle R1 <math>a(b+c) \rightarrow b+ac</math>, ER_a_Fois2ndDeSomme</i>		
<i>Test sur :</i>	<i>Diagnostic :</i>	<i>Explication</i>
$10(-4x-1) \rightarrow -4x-10$	R1	
$10(-4x-1)+2(4x^2-6) \rightarrow -4x-10+4x^2-12$	R1 n'apparaît pas	Conditions trop fortes sur le but

La trace est, alors, un outil précieux pour visualiser où il n'y a pas eu appariement d'une certaine règle, cf. Document 12 & Document 13.



Document 12

Requête pour tracer la règle  $a(b+c) \rightarrow b+ac$

<sup>22</sup> Valeur subjective, sur laquelle nous reviendrons.

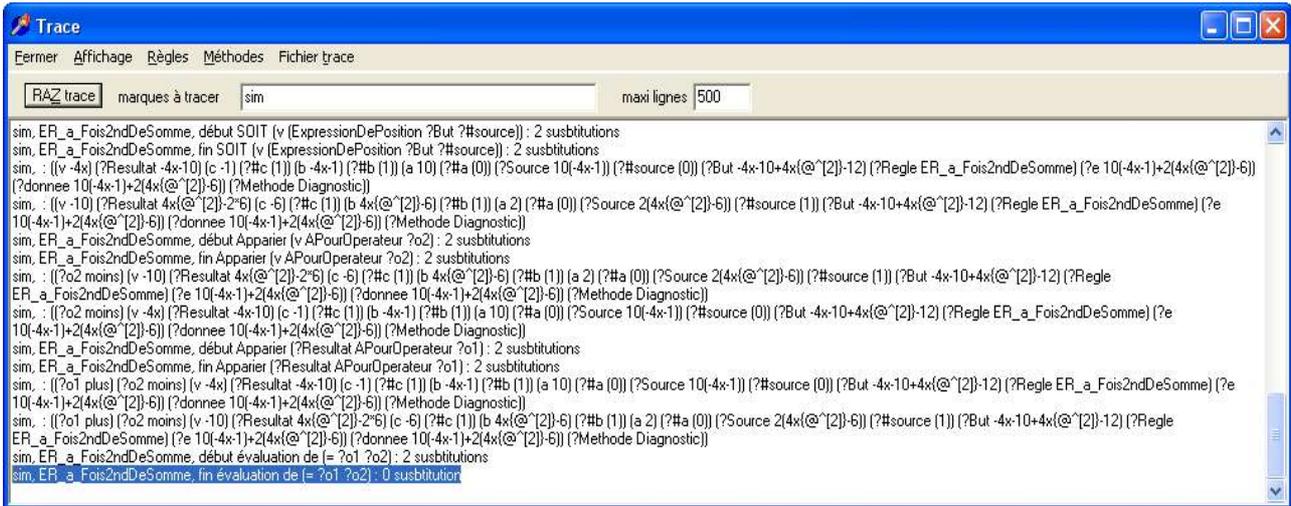
<sup>23</sup> Système d'inférence et de MétaInférences. SIM fonctionne en chaînage avant :

\* déterminer les règles applicables, cf. 2.3.2.1

\* en choisir une,

\* appliquer la règle choisie.

Pour plus d'informations sur SIM, se référer à [Nicaud, 1993].



Document 13

Tracer une règle dans une transformation permet de voir à quel endroit elle n'a pu s'appliquer. Ici, l'unification a échoué parce que la condition d'application de cette règle (même opérateur dans l'expression produite et l'expression finale) n'était pas vérifiée.

\* Nous avons aussi créé de nouvelles règles, plus fines que celles prévues lors de la première trame de règles : par exemple, la suppression de parenthèses derrière un signe moins. Au départ, seulement deux possibilités avaient été envisagées : la suppression brute de parenthèse -le signe moins ne s'appliquant, alors, que sur le premier élément- ou l'application du signe moins sur le dernier élément uniquement. Or, il est apparu que certains élèves ne l'appliquaient que sur les termes négatifs ou, que sur les termes positifs, règles, que nous avons, alors, ajoutées à Anais.

• Comparaison manuelle entre le diagnostic et l'analyse manuelle (C)

La lecture du diagnostic a apporté deux nouvelles remises en question : celle de (A) et celle de (B).

\* En effet, il est apparu, parfois, que le diagnostic propose un enchaînement d'erreurs, qui n'avait pas été analysé comme tel lors de l'analyse didactique (A). Ainsi en est-il de la transformation suivante :

Étape 3, action 136, étape mère 2	transformation ERRONEE	(diag <<7x-x+(2x-12)+(-8-3x)-20 -> 8x-20+(2x-8)-x-20+(-12-3x)>>)	
BUT : 7x-x+(2x-12)+(-8-3x)-20 -> 8x-20+(2x-8)-x-20+(-12-3x)	(2x-12)-20 -> -20+2x-20-12	distributivité du signe + d'un terme sur une somme	ER_terme_plus_somme
transfo : 7x-x+(2x-12)+(-8-3x)-20 -> 7x-x-20+2x-20-12+(-8-3x)	-x+(-8-3x) -> -8-x-3x	distributivité du signe + d'un terme sur une somme	ER_terme_plus_somme
SOUS-BUT : 7x-x-20+2x-20-12+(-8-3x) -> 7x-8-x-3x-20+2x-20-12	7x-x -> 8x	soustraction transformée en addition, ex: 7x - x -> 8x	ER_OubliSigneMoins
transfo : 7x-x-20+2x-20-12 -> 7x-8-x-3x-20+2x-20-12			
SOUS-BUT : 7x-8-x-3x+2x-12 -> 8x+(2x-8)+(-12-3x)			
transfo : 7x-8-x-3x+2x-12 -> 8x-8-3x+2x-12			
SOUS-BUT : -8-3x+2x-12 -> (2x-8)+(-12-3x)			
But atteint	Developpement		

Document 14

Transformation erronée, laissée de côté lors de l'analyse manuelle et correctement diagnostiquée par Anais.

\* D'autre part, une remise au point régulière des règles a été nécessaire : en faisant tourner le diagnostic sur différentes classes, il est apparu que certaines règles étaient soit trop imprécises, soit de taux d'apparition trop élevé alors qu'elles ne correspondaient pas au diagnostic souhaité.

Comme exemple du premier cas, qui relève du problème de granularité de la modélisation, nous pouvons donner celui des groupements additifs. De prime abord, les

transformations  $2x+5x \rightarrow 4x$ ,  $-2x-2x \rightarrow 0$ ,  $-5x+2x \rightarrow -7x$  avaient, toutes trois, été associées à la même "explication" : *un groupement additif erroné*. Nous avons affiné, par la suite, (après une première boucle (B)-(C)) en trois règles distinctes :

$2x+5x \rightarrow 4x$  restera un groupement additif erroné,

$-2x-2x \rightarrow 0$  sera modélisé par  $-a-a \rightarrow 0$ , le premier signe moins n'étant pas perçu comme le signe de  $2x$ ;

$-5x+2x \rightarrow -7x$  sera modélisé par  $-a+b \rightarrow -(a+b)$ .

Quant au deuxième cas, outre la suppression ou réécriture de règles de champ d'application trop vaste (telle que ER\_abDonnea+b), l'idée nous est venue de donner une priorité aux règles. Jusqu'alors, nous pouvions modifier le statut de certaines règles en les plaçant dans le groupe des règles dites faibles et leur octroyer, ainsi, un coût de 3 au lieu de 2. Toutefois, afin d'affiner encore le diagnostic, il a été envisagé, à long terme, de donner des coûts distincts aux règles, en leur donnant une sorte de "classement de priorité". Ce projet n'est pas, à l'heure actuelle, amorcé et demande une réflexion sur la subjectivité du dit-classement. A court terme, comme nous venons de le préciser, nous n'avons seulement "joué" que sur leur statut possible de règles faibles. Par exemple, pour le diagnostic de  $7x-x \rightarrow 8x$ , la règle fine «*soustraction transformée en addition*» n'apparaissait qu'après «*groupement additif erroné*», de même coût. Ainsi, avons-nous placé cette dernière en règle faible, augmentant, dès lors, son coût.

Pour ces trois types d'ajustement, et dans le but de ne pas refaire toute la "critique manuelle" à chaque nouveau diagnostic, nous avons utilisé CompareDiag, un logiciel qui permet de comparer deux fichiers de diagnostics portant sur les mêmes protocoles en produisant un troisième fichier dans lequel sont indiqués les changements, cf. Document 15 :

DiagBad->DiagDiff; 18 diagnostics différents	DiagBad->Echec; 1 mauvais diagnostic qui devient un échec
DiagBad->Idem; 10 mauvais échecs qui en sont toujours	DiagNil->DiagDiff; 117 diagnostics non analysés différents
DiagNil->Echec; 3	DiagNil->Idem; 940 diagnostics non analysés identiques
DiagOk->DiagDiff; 32	DiagOk->Idem; 25 diagnostics identiques
EchecBad->Diag; 16 mauvais échecs qui n'en sont plus	EchecBad->Idem; 8
EchecNil->Diag; 5	EchecNil->Idem; 50
EchecOk->Idem; 1 bon échec qui l'est toujours	

Document 15

Exemple de résultat de la comparaison automatique CompareDiag de deux fichiers de diagnostics d'Anaïs.  
La différence provient d'une modification soit des règles, soit de l'algorithme.

### 3.3.3 Cinquième conclusion

Le va-et-vient entre magnétoscope et protocoles a permis de valider l'hypothèse de fonder notre méthodologie sur les productions d'Anaïs en tant que reflet des productions d'élève. De plus, les règles semblent être une bonne modélisation de transformations dans le domaine du calcul algébrique, puisque toute transformation pertinente ou non d'un élève

est susceptible d'être modélisée comme l'application d'une règle correcte ou erronée. Nos hypothèses ont été ainsi confortées par notre méthodologie. Quant aux questions épistémiques sous-jacentes au problème de représentation informatique, elles trouvent, elles-aussi, réponses dans ce qui suit.

Le schéma 6 détaille le type de modélisation épistémique d'une part et d'autre part, reformule la question 6 en la scindant en deux nouvelles questions : quelle relation entretient le modèle épistémique avec notre propre modèle manuel -question 6 a- et quelle est-elle avec un modèle plus "objectif", construit par des didacticiens extérieurs à notre travail -question 6 b-.

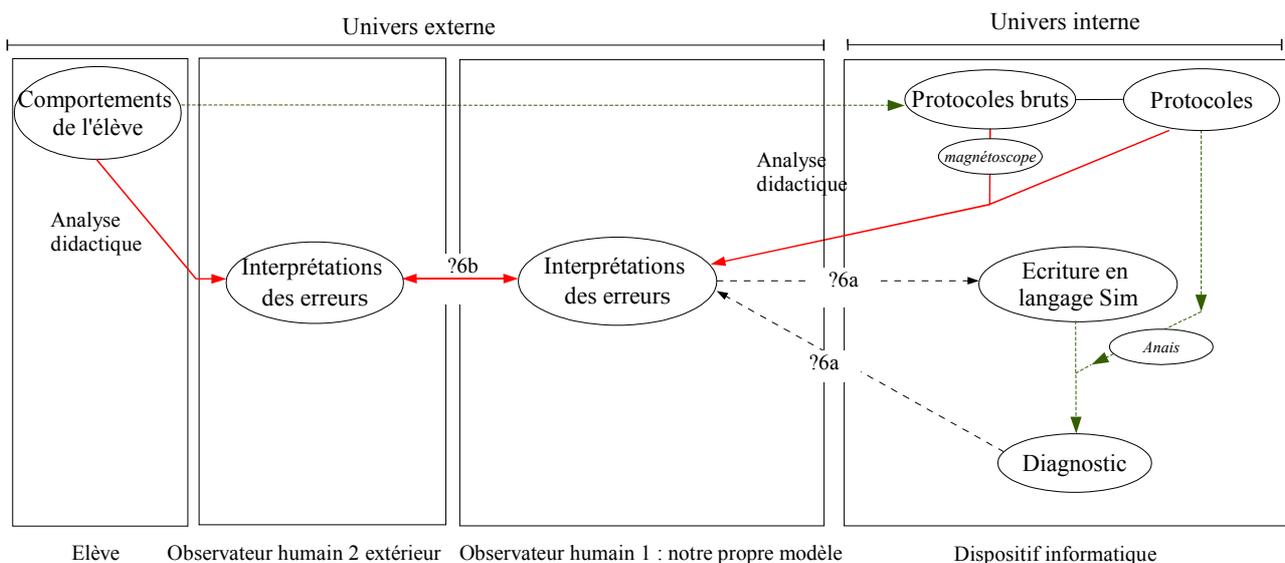


schéma 6  
Réponse à la question 5 et scission de la question 6

- Interprétation principalement didactique, à savoir humaine
- Interprétation principalement informatique
- Boucle entre diagnostic automatique et analyse manuelle

question 6 a : ?2a, quelle est la valeur de ce que Anais propose comme diagnostic ?

question 6 b : ?6b, quelle est la valeur de notre propre analyse ?

### 3.4 Traitement des problèmes soulevés

Avant de répondre à ces deux nouvelles questions, détaillons trois modifications internes qu'Anais a dû subir, à la suite de notre travail.

- L'isolation

Pour éviter une explosion combinatoire de la recherche heuristique de l'algorithme de diagnostic, un mécanisme d'isolation avait été implanté consistant en la suppression des arguments communs entre l'expression mère et l'expression finale. Ainsi, pour la

transformation  $6x+x(2+x) \rightarrow 6x+2x+x^2$ , Anais ne comparait que  $x(2+x)$  à  $2x+x^2$ . Or ce mécanisme nous a posé des problèmes de diagnostic. En effet, il se peut qu'Anais isole deux arguments qui étaient, certes, les mêmes syntaxiquement mais avaient subi une transformation. Par exemple,  $x+(x+2) \rightarrow x+x+x+2$ , qui aurait dû être diagnostiqué comme l'erreur ER\_Terme\_Plus\_Somme, à savoir une distributivité du terme  $x$  sur  $x+2$  par l'opérateur addition et qui, à cause de l'isolation, lançait son algorithme sur  $x+2 \rightarrow x+x+2$  et produisait un échec, cf. Document 16. Pour traiter ce genre de transformation, il a fallu réintroduire un mécanisme qui conserve l'expression mère et le but-mère pour ne pas avoir une isolation totale. Ce mécanisme peut être activé ou non pour chaque règle.

La règle ER_Terme_Plus_Somme	Résultat du diagnostic << $x+(x+2) \rightarrow x+x+x+2$ >>
Sans l'introduction du mécanisme	ECHEC
Avec introduction du mécanisme [sous_isoler vrai]	Diagnostic No 1, coût=2 (transformation ERRONEE) BUT : $x+(x+2) \rightarrow x+x+x+2$ transformation : $x+(x+2) \rightarrow x+x+2+x$  >>> par la règle ER_Terme_Plus_Somme : distributivité du signe + d'un terme sur une somme

Document 16  
Exemple d'impact du mécanisme de sous-isolation

- Introduction du signe « = », par l'élève, au sein d'une expression, cf. 1.5.2.2

Cette insertion, source de problème pour le diagnostic, a fait émerger l'idée de bloquer les touches « =, >, < ... » pour les exercices de développement-réduction. A court terme, pour traiter ce problème dans le diagnostic des protocoles déjà existants, deux nouvelles règles<sup>24</sup> ont été intégrées : l'une pour traiter le cas d'apparition d'un des signes ci-dessus, au cours d'un exercice de développement-réduction, et l'autre pour traiter la disparition de ces signes dans un exercice de résolution d'équation-inéquation.

- Enchaînement d'une factorisation à un développement, et inversement

Dans une analyse manuelle d'un protocole, l'on s'interdit naturellement d'enchaîner certaines transformations telles qu'une factorisation à la suite d'un développement. Or, il n'en était rien pour Anais. Ainsi, pouvait-il proposer des diagnostics peu coûteux mais erronés, cf. Document 17.

<sup>24</sup> Cf annexe 3.

Diagnostic No 1, coût=3 (transformation ERRONEE)

BUT :  $7x^3x+7x^5 \rightarrow 21x^2+35$

transformation :  $7x^3x+7x^5 \rightarrow x(7^3x+7^5)$

>>> par la règle RES\_FacteurCommunTotal : mise en facteur commun

| Resultat :  $x(7^3x+7^5)$  (multiplier polynôme)

transformation :  $x(7^3x+7^5) \rightarrow x7^3x+7^5$

>>> par la règle ER\_a\_Fois1erDeSomme : distribution sur 1er terme somme

| Resultat :  $x7^3x+7^5$  (plus polynôme)

Document 17

Diagnostic erroné, utilisant une factorisation suivie d'un développement pour la transformation  $7x^3x+7x^5 \rightarrow 21x^2+35$  tandis que le diagnostic correct « perte argument » coûtait 5.

Une nouvelle fonctionnalité a alors été implémentée : celle d'indiquer des incompatibilités parmi les règles d'un diagnostic, interdisant, par exemple, une factorisation à la suite d'un développement.

### 3.5 Réponses aux question6 a & question6 b

La "critique" manuelle entre diagnostic automatique et analyse didactique, qui consiste à accepter ou non le diagnostic proposé par Anais, a permis de répondre à une de nos interrogations : quelle est la pertinence du diagnostic automatique ? Les résultats qui en sont ressortis semblent, pour le moins, satisfaisants, comme le précise le paragraphe suivant.

#### 3.5.1 Les résultats

Les diagnostics automatiques de la classe de 4e1 et de la classe de 3e1 ont été lancés pour 100 pas. Leur lecture critique en donne les résultats suivants :

Analyse	Explications	4 <sup>e</sup> 1	3 <sup>e</sup> 1
Nombre total de transformations <i>erronées</i> <sup>25</sup>	Dans le domaine considéré.	129	59
DiagOk	Le diagnostic automatique nous a paru correct	104	46
DiagBad	Le diagnostic automatique nous a paru incorrect	12	4
EchecOk	Un échec peut, parfois, s'avérer correct si l'analyse manuelle considère la transformation erronée non diagnosticable.	12	6
EchecBad	Un échec peut, parfois, s'avérer mauvais si l'analyse manuelle considère la transformation erronée comme diagnosticable.	1	3
DiagOk/Diag	Quotient du nombre des bons diagnostics, <i>échecs non compris</i> , par le nombre de diagnostics, <i>échecs non compris</i> . DiagOk/(DiagBad+DiagOk)	89,70%	92,00%

25 Toutes les transformations correctes sont correctement diagnostiquées par Anais mais nous n'en tenons pas compte dans nos résultats.

Analyse	Explications	4 <sup>e</sup> 1	3 <sup>e</sup> 1
Ok/transformations	Quotient du nombre des bons diagnostics, <i>échecs compris</i> , par le nombre des mauvais diagnostics, <i>échecs compris</i> . (DiagOk+EchecsOk)/Transformations	90,00%	88,10%

## Document 18

## Résultats de la comparaison entre diagnostic automatique et analyse manuelle

Les diagnostics perçus comme mauvais de la 4<sup>e</sup>1 sont analysés ci-après.

Un travail similaire a été fait sur la classe de 3<sup>e</sup>1, où la majorité des erreurs sont des « pertes » d'exposants, d'argument etc. et plus grossièrement sur l'ensemble des six classes de 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>.

Pour des précisions quant aux taux de transformations erronées par exercice, se référer à [Sander et al., 2005]

Ces résultats révèlent qu'Anais est un outil pertinent et approprié pour l'analyse des transformations puisqu'il propose un diagnostic en relativement bonne adéquation avec celui fait manuellement.

### EXPLICATIONS DES 12 DIAGBAD DE LA 4<sup>e</sup> 1

1/13 (7,7% des bad) sont hors domaine (ce sont des exercices de développement mais les élèves les traitent comme de la factorisation).

1/13 (7,7% des bad) dû à un manque de connaissance sur l'utilisation de Aplusix.

6/13 (46% des bad) concernent des règles difficiles à mettre en place (problème d'isolation, oubli d'un terme, changement de signe), dont 4 deviendraient des DiagOk pour un nombre de pas supérieur à 100.

Le reste (5/13 (38% des bad)) concerne des mauvais diagnostics face à des erreurs soit non prises en compte ( $-3(-7+2x) \rightarrow 10-6x$ ) soit dues à une inattention (oubli du signe opératoire) ou encore à une combinaison d'erreurs.

Ci-dessous le récapitulatif des DiagBad et EchechBad de la 4<sup>e</sup>1.

- a) **Règles de factorisation au sein d'un développement** : (1 élève)  
 - hardel;4e1; (diag <<10x+1-6x<sup>2</sup>+5-3x<sup>2</sup>+6x-6 --> x(10+6x-3x)+1-6>>);(DiagBad)  
 (diag <<10x+1-6x<sup>2</sup>+5-3x<sup>2</sup>+6x-6 --> x(10+6)+x<sup>2</sup>(6-3)+1-6+5>>) (EchecOk)  
 (diag <<-2x<sup>2</sup>+3x-7-x-2x<sup>2</sup>-8 --> x<sup>2</sup>(-2-2)+x(3-1)-7-8>>) (EchecOk)

- b) **Des mauvaises utilisations de Aplusix** : (1 élève)  
 Confusion entre x et \*  
 Eleve hardel;4e1;(diag <<4x3x<sup>2</sup>-4\*6+7x\*4 --> 12x<sup>2</sup>-24+28x>>);(DiagBad);

Deux types de diagnostic semblent difficiles pour Anais : ceux où il y a eu changement de signe (comment intégrer une règle a -> -a sans faire exploser le diagnostic ?) et ceux où il y a eu un oubli de terme suivi d'une autre transformation (permutations des termes, réduction, application d'une règle erronée etc.). Le logiciel, selon le contexte, peut réussir à trouver une combinaison de règles pour expliquer cette transformation :

- c) **Oubli d'un terme** : (6 élèves : 5 Diagbad et 1 echechbad)

\* le bon diagnostic sort à partir de n pas :

- berthelot;4e1; (diag <<10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 --> 16x-3x^2>>) (DiagOk pour 180 pas (ER\_PerteArgumentSomme))
- madeline-richet;4e; (diag <<10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 --> 16x-3x^2>>)
- sauvage;4e1;(diag <<10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 --> 16x-3x^2>>)
- jovet;4e1 (diag <<10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 --> 9x^2+16x^2>>) *EchecBad*;  
(Un premier DiagOk de coût 13 sort à 180 pas, puis un DiagOk de coût 12 et plus fin à 200 pas.)
- mazars;4e1;(diag <<-3(-7+2x)+4(7+6x^2) --> -21-6x+24x^2>>)

\* **le bon diagnostic ne sort pas quelque soit le nombre de pas :**

- bertin;4e1; (diag <<10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6 --> (-6x^2-3x^2)+(10x+6x)+(1-6)>>) (*DiagBad*; oubli d'un terme avec introduction de parenthèses)

d) **Oubli d'un signe opératoire** : (2 élèves)

- bongrain;4e1; (diag <<5x^2+3x-7-3x^2+2x+8 --> 2x^2[2]5x+1>>)
- sophiebaudon;4e1; (diag <<6x^2-3x^2+10x+6x+1-6+5 --> 9x^2[2]16x+1-6+5>>)

e) **Les vrais "bad"** : (3 élèves)

- dupon;4e; (diag <<4(3x^2-6+7x) --> 12x^2-13x>>) (*DiagBad*) (combinaison de 3 règles erronées qu'Anais sort dans le mauvais sens : elle commence par développer)
- sahabun;4e1; (diag <<-3(-7+2x)+4(7+6x^2) --> 10-6x+21+24x^2>>) (*DiagBad*)
- guenee;4e; (diag <<-2x^2+3x-7-x-2x^2-8 --> -2x^2-15>>) (*DiagBad*)  
(le bon diagnostic ne sort pas car la règle ER\_Somme des coefficients de monômes exclut le cas où les coefficients des deux monômes sont égaux en valeur absolue.)

### 3.5.2 Les règles de Paris VIII

« La prise en compte de l'élève a pour base des observables, produits d'un découpage et d'une organisation du "réel" sous un contrôle théorique et méthodologique dont la pertinence est déterminée par la problématique de l'observateur. » [Balacheff, 1994]

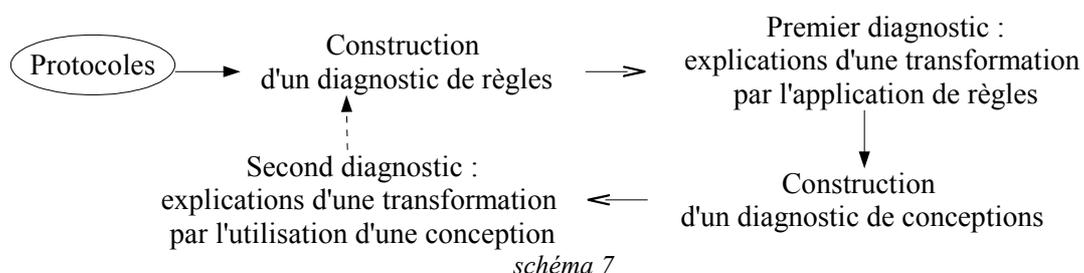
La pertinence d'une modélisation est donc, de toute manière, subjective. Cependant nous avons pu porter un regard extérieur sur, non pas l'ensemble de la modélisation, mais l'exhaustivité de la bibliothèque de règles erronées. Au total, 72 règles erronées ont été identifiées concernant le développement-réduction et implémentées à Anais, cf. Annexe 6. Nous les avons comparées aux règles manuelles, proposées par l'équipe parisienne qui a construit le corpus d'exercices de l'expérimentation, cf. Annexe 7, pp73. Il en ressort que, malgré le fait que les règles de Paris soient très contextualisées, une grande similarité des règles lie les deux analyses, cf. Annexe 7.

### 3.6 Sixième conclusion

Nos questions sur le modèle épistémique d'Aplusix ont trouvé une réponse en l'explicitation de la construction d'un diagnostic de règles. La valeur de ce diagnostic a été évaluée, positivement, par une comparaison avec une analyse manuelle. Cependant, nous souhaiterions atteindre un niveau supérieur de modélisation, celui de regroupement de

règles afin, à terme, de diagnostiquer des conceptions d'élèves. Les prémices de ce travail, décrites dans la partie suivante, ont permis d'élaborer une trame pour des recherches ultérieures.

#### IV. VERS LA CONSTRUCTION D'UN DIAGNOSTIC DE CONCEPTIONS D'ÉLÈVES



*Après la construction d'un diagnostic de règles, nous nous intéressons à celle d'un diagnostic plus élaboré : expliquer une transformation erronée d'un élève par une conception.*

##### 4.1 Fréquence des erreurs

La pertinence de l'outil informatique se manifeste de nouveau : alors qu'il serait fastidieux, voire impossible, de comptabiliser à la main les occurrences de l'utilisation de chaque règle, Anais permet de produire un fichier où à chaque règle correspond son nombre d'utilisation par élève, cf. Document 19, ci-après.

D'une part, ces résultats révèlent la marginalité de certaines règles, qui peut relever soit d'un manque de précision lors de l'écriture de cette règle, soit d'un phénomène didactique. Par exemple, le fait que ER\_AdditionPrioritaireParenthese  $(a+bQ \rightarrow (a+b)Q)$  ne soit pas utilisée alors que ER\_AdditionPrioritaireParenthese  $(a-bQ \rightarrow (a-b)Q)$  l'est, peut s'expliquer soit parce qu'aucun énoncé d'exercice ne pouvait provoquer ce type d'erreur, soit parce que les élèves ne font cette erreur de priorité que dans le second contexte : en présence du signe moins.

D'autre part, une erreur, nous l'avons dit, n'a d'intérêt que par sa reproductibilité, extrêmement lisible dans le tableau, dont les nombres attestent que le domaine du calcul littéral est riche en termes d'utilisation abusive de règles d'actions.

Noms des règles	Total	Noms des règles	Total
ER_2NegatifsIdDonne-1	1	ER_MoinsVuOperateur	11
ER_2TermesNegatifsDonneNul	8	ER_Negatifx^n_Donne_Negatif^nx	4
ER_2TermesNegatifsDonneNul_DansSomme	19	ER_OubliSigneMoins	16
ER_2TermesPositifsDonneNul_DansSomme	9	ER_pa^n_Donne_pna	13
ER_a^2p		ER_PerteArgumentProduit	31
ER_a^2p+1		ER_PerteArgumentSomme	51
ER_a^n^p		ER_PerteCarre_Dvt	64
ER_a^n_Donne_na	10	ER_PerteCarre_Dvt2	27
ER_a_Fois1erDeSomme	3	ER_PerteCarre_Produit2facteurs	28
ER_a_Fois2ndDeSomme	12	ER_PerteCarre_Produit4facteurs	11
ER_AdditionPrioritaireParenthese		ER_PerteCarre_Somme	4
ER_AjoutMoins	5	ER_PerteDenominateur	1
ER_AjoutSigneMoins	1	ER_PerteExposant	4
ER_ax_Fois1erDeSomme	1	ER_PerteMoins	67
ER_ax_Fois2ndDeSomme		ER_Pertex_Dans_x^2	2
ER_Change_Nombre	167	ER_Pertex_Dans_x^2Dvt	
ER_constant_plus_variable_donne_constant	4	ER_Pertex_Dans_x^2Dvt2	1
ER_constant_plus_variable_donne_variable	22	ER_Pertex_Dvt	6
ER_degré1_plus_degré2_donne_degré1	7	ER_Pertex_Dvt2	8
ER_degré1_plus_degré2_donne_degré2	8	ER_Pertex_Produit3facteurs	16
ER_DegréhPlusDegrek_Donne_DegrehPlusk	20	ER_Pertex_Red	5
ER_DifferenceMonomesIdDegreNDonneX^N		ER_Positifx^n_Donne_Positif^nx	22
ER_DifferenceMonomesIdDonneMoinsX		ER_Priorite	2
ER_DifferenceMonomesIdDonneX	1	ER_Produit	58
ER_DisparitionRelation	50	ER_somme	196
ER_grouptAdditif	86	ER_Somme_Moins_Somme	
ER_grouptMultiplicatif	18	ER_Somme_Plus_Somme	
ER_IntroductionRelation	110	ER_SommeDegreMonomeCoefIdentique	12
ER_InversionSigneResultat	108	ER_SommeDegreMonomes	6
ER_InversionSigneSomme	40	ER_SoustractionPrioritaireCorpsId	2
ER_Moins1erSomme_Coefficient	4	ER_SoustractionPrioritaireParenthese	8
ER_Moins2ndSomme_Coefficient	3	ER_SupprParenthesesBrute	4
ER_Moins2ndSomme_Monome	2	ER_SupprParenthesesBrute_dvt	
ER_Moins_a_Fois1erDeSomme		ER_SupprParenthesesBrute_dvt2	7
ER_Moins_a_Fois2ndDeSomme		ER_Terme_Moins_Somme	4
ER_Moins_Fois1erDeSomme	1	ER_Terme_Plus_Somme	4
ER_Moins_Fois2ndDeSomme		ER_TermeMoinsSommeDonneTermeFoisMoinsSomme	2
ER_Moins_FoisAucunDeSomme	8	ER_TermePlusSommeDonneTermeFoisSomme	
ER_Moins_FoisNbNegatifsDeSomme	1	GEN_Somme_Fois_Somme	119
ER_Moins_FoisNbPositifsDeSomme	2		

Document 19

Nombre d'utilisation des règles pour 624 élèves travaillant sur 31 exercices ; L'intérêt d'Anais s'impose de lui-même.

#### 4.2 Première approche : à la recherche de conceptions

Les règles erronées et leur taux d'apparition forment ainsi une base pour diagnostiquer des conceptions : le diagnostic automatique permet de repérer quelles règles l'apprenant applique de façon récurrente. Ce dernier adapte une connaissance qui doit donc posséder une cohérence tangible pour que sa règle ne soit pas invalidée ni par son inefficacité, ni par des sanctions, sinon il ne l'appliquerait pas avec tant d'acharnement. Or certaines règles peuvent faire appel à une même explication, à une même interprétation, ou encore elles peuvent être une instantiation contextualisée d'une règle plus générale, qui a elle-même

ses propres raisons d'être -validité partielle ou étendue, similitude avec une règle correcte etc.- : « une conception ne fonctionne pas seule mais en interaction avec d'autres » [Balacheff, 1994], pp37. C'est ce lien que nous avons essayé de discerner entre les différentes règles, nous basant sur l'hypothèse initiale que les objectifs de l'apprenant sont influencés par des modèles d'action ou encore théorèmes-en-acte.

#### **4.2.1 Structure des règles**

Le classement des règles a permis de lier les transformations erronées entre elles et ainsi d'atteindre un seuil supérieur dans la modélisation. En effet, outre l'embaras de donner à une règle, un nom pertinent et court, nous avons été confronté à la difficulté de structurer l'ensemble des règles. Dans ce travail, il faut adopter une démarche inverse de celle de l'écriture des règles : il faut chercher à décontextualiser les règles pour mieux les regrouper. Par exemple, les règles  $kx(ax+b) \rightarrow kax + kbx$  et  $x^*x \rightarrow x$  peuvent toutes deux déceler la conception  $xx \rightarrow x$ , l'une ayant trait au développement et l'autre à la réduction. Pour la lecture du diagnostic, il est alors plus commode de visualiser la couche supérieure ( $xx \rightarrow x$ ) plutôt que la règle fine contextualisée ( $kx(ax+b) \rightarrow kax + kbx$ ). Pour cela, le « *niveau abstraction* » des règles doit être réglé sur « *fin* » pour permettre à la structure mère d'apparaître.

#### **4.2.2 Vecteur de comportement**

L'idée initiale a été de prendre modèle sur ce qui avait été déjà fait dans le domaine des équations, cf. [Nicaud et al, 2005]. Dans ce cadre, la modélisation des comportements des élèves est fondée sur la représentation des transformations par un *vecteur de comportement local*, ensemble d'un contexte<sup>26</sup> et d'une action. La collection d'actions similaires dans des contextes différents d'un même élève pourrait alors être perçue comme une conception. Ainsi, dans le domaine qui nous intéresse, avons-nous tenté de lister les variables pertinentes, qui constitueraient le contexte.

#### **Réduction de monômes sans présence de parenthèses**

##### *Contexte*

- Nature de la réduction (somme, produit)
- Nombres d'arguments (1,2...)
- Exposants (exposants tous identiques non unitaires, identiques unitaires, autres)
- Relations entre coefficients (coefficients tous identiques non unitaires, identiques unitaires, autres)
- Nature des coefficients (entiers, rationnels, irrationnels)
- Signe des coefficients (tous positifs, tous négatifs, mélange)

---

26 Pertinent pour l'action.

*Les actions en seraient donc les règles de réduction.*

### Développement de AoB, avec o un opérateur

#### *Contexte*

- Nature de l'opérateur (produit (explicite ou non), somme, différence, (quotient))
- Nombres d'arguments (1,2...)
- Nature des arguments (monômes, somme) et leurs caractéristiques (degré, signe (négatif, positif, mélange), coefficient unitaire ou non)
- Présence des parenthèses dans les arguments (vrai, faux)
- Relations entre les arguments (de même signe, égaux)

*Les actions en seraient donc les règles de développement.*

Nous avons synthétisé cette forme de modélisation du développement par un schéma 8 :

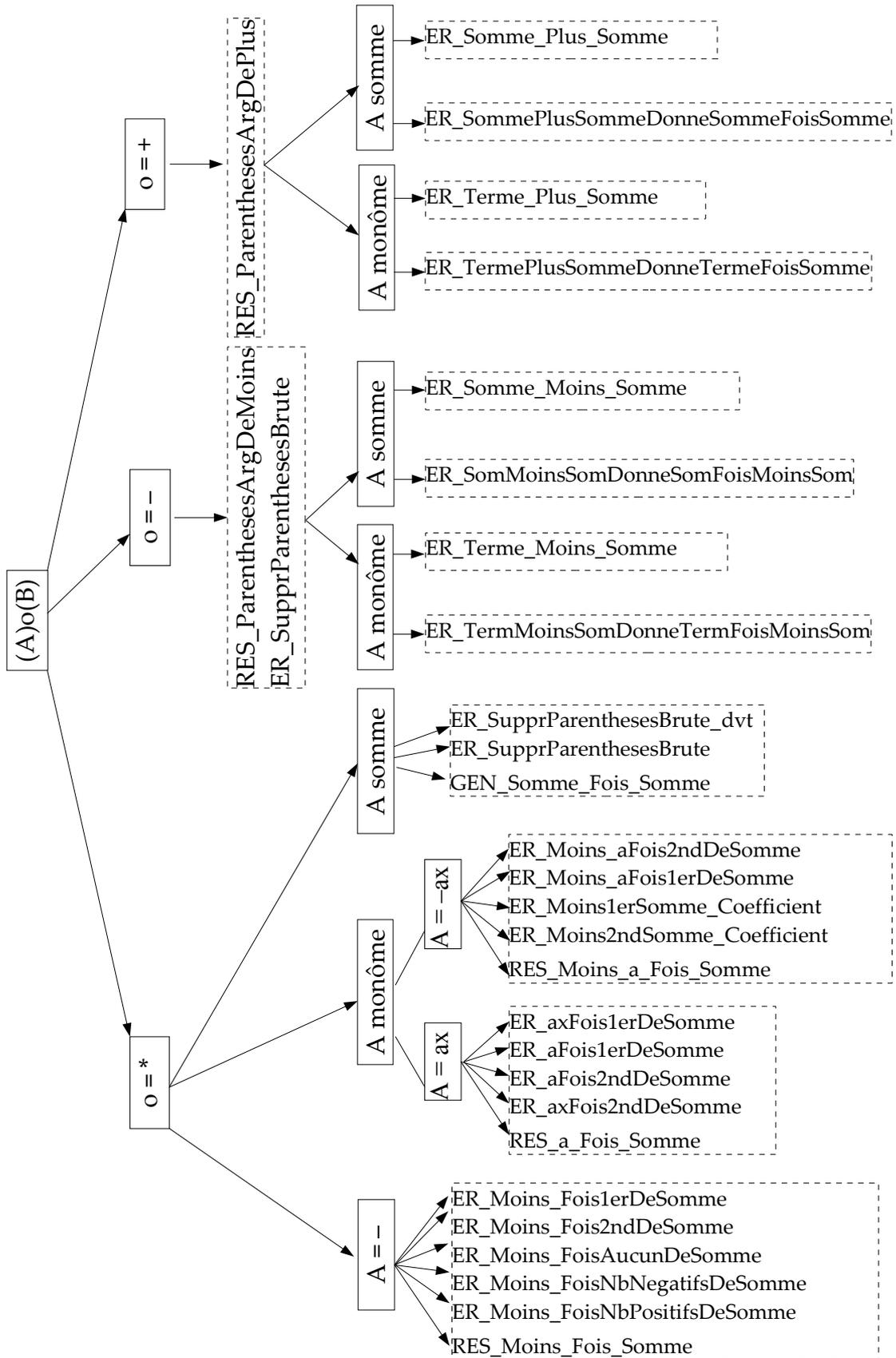


schéma 8

Modélisation des actions de la tâche « développer », dans des contextes différents.

Finalement, il s'est avéré d'une part, que le domaine du développement-réduction était plus dense que celui des équations et d'autre part, que les règles de développement-réduction étaient suffisamment contextualisées. Il semble donc, a priori<sup>27</sup>, difficile de modéliser les comportements des élèves dans notre domaine de manière similaire à celui des équations. Cependant, au cours de notre travail de recherche de conceptions, trois notions fondatrices du calcul littéral sont ressorties, ce qui a constitué notre seconde approche.

### 4.3 Seconde approche : trois notions fondatrices

Un objet de savoir mathématique ne prend pas sa signification dans une seule classe de situations ; certaines situations privilégient des modèles de comportements tandis que d'autres les rejettent. Pour le maîtriser correctement, il faut donc le rencontrer dans des situations diverses, permettant de mieux en mesurer les limites, de lui donner un sens plus précis et plus juste. Un regroupement des résultats visualisés dans Anais permet d'en faire émerger certains plus difficiles à acquérir, semble-t-il, par les élèves : les puissances, l'usage des parenthèses et le signe moins. Trois notions pouvant, certes, être liées, à première vue, au calcul numérique mais dont, nous le verrons, le calcul littéral est en fait source d'erreurs.

Nous allons donner quelques théorèmes-en-acte utilisés par les élèves pour traiter des problèmes sous-jacents à ces trois objets, sous forme d'un tableau ; la première colonne donne, en gras, les théorèmes en acte et, en police normale, des règles d'actions qui en découlent. Des tentatives d'explications suivent certaines règles d'action soit en recherchant des schèmes qui servent de support aux comportements d'erreur soit en étudiant des situations qui ont pu contribuer à la mise en place de modèles d'action erronés et qui tendent à perpétuer ces modèles erronés, méthodes que préconise Tonnelle, [Tonnelle, 1979], p42.

#### 4.3.1 Les puissances

La notion de puissance est un concept mathématique, qui a une définition précise : la puissance d'un nombre  $a$  d'exposant  $n$ , signifie le produit de  $n$  facteurs tous égaux à  $a$ . On le note  $a^n$ .

<b>Théorème-en-acte</b> ou règle d'action	<b>Domaine de validité</b>	<b>Description, explications</b>	<b>Exemples</b>
<b><math>(abc)^n = abc^n</math></b> $= ab^n c = a^n bc$	$n = 1$	Indépendance de l'exposant	

<sup>27</sup> Il est envisageable et souhaitable qu'avec plus de temps et d'expérience, une structure plus précise ressorte.

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
$ab^n = (ab)^n$	a = -1 et n impair ou a = 1 ou n=1.	l'exposant s'applique au produit et non uniquement à la lettre à laquelle l'exposant est accolé	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x^3 \rightarrow (2x)^3</math></li> <li>• <math>2(x+3)^2 \rightarrow 4(x+3)^2</math></li> <li>• <math>-3x^2 \rightarrow (-3x)^2</math></li> <li>• <math>-3x^3 \rightarrow (-3x)^3</math></li> <li>• <math>x*5^3 \rightarrow (x*5)^3</math></li> </ul>
$ab^n = a(b^n)$	a et b, éléments d'un groupe noté multiplicativement	convention d'écriture sur l'exposant	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x^3 \rightarrow 2(x^3)</math></li> <li>• <math>-3x^2 \rightarrow -3(x^2)</math></li> </ul>
$(ab)^n = a^n b^n$	groupe abélien	$(ab)^n$ signifie le produit de n facteurs ab, ce qui donne, par commutativité de la loi multiplicative, le produit de n facteurs égaux à a par n facteurs égaux à b.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(2x)^3 \rightarrow 8x^3</math></li> <li>• <math>[2(x+3)]^2 \rightarrow 4(x+3)^2</math></li> <li>• <math>(-3x)^2 \rightarrow 9x^2</math></li> <li>• <math>(-3x)^3 \rightarrow -27x^3</math></li> </ul>
$ab^n = a^n b$	b = -1 et n impair ou b = 1 ou n = 1		<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(2x)^3 \rightarrow 8x</math></li> <li>• <math>[2(x+3)]^2 \rightarrow 4(x+3)</math></li> <li>• <math>(-3x)^2 \rightarrow 9x</math></li> <li>• <math>(-3x)^3 \rightarrow -27x</math></li> <li>• <math>(-x)^3 \rightarrow -x</math></li> </ul>
<i>Tentatives d'explications</i>	les opérations rencontrées dans la scolarité ont pour la plupart la propriété de la commutativité, ce qui a pu contribuer à la projection de cette propriété les puissances.		
$(ab)^n = ab^n$	a=-1 et n impair ou a = 1 ou n = 1	Non prise en compte des parenthèses	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(2x)^3 \rightarrow 2x^3</math></li> <li>• <math>[2(x+3)]^2 \rightarrow 2(x+3)^2</math></li> <li>• <math>(-3x)^2 \rightarrow -3x^2</math></li> <li>• <math>(-3x)^3 \rightarrow -3x^3</math></li> <li>• <math>(-x)^2 \rightarrow -x^2</math></li> </ul>
$x^n = nx$	Si n = 1 ou x = 0 ou n = 2 et x = 2	$x^n$ est une notation multiplicative, nx une notation additive.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>3x + x^3 \rightarrow 2x^3</math></li> <li>• <math>2x \rightarrow x^2</math></li> <li>• <math>2x+2y \rightarrow (x+y)^2</math></li> <li>• <math>2x+4x^3 \rightarrow 2x+12x</math></li> <li>• <math>(3+x)^2 \rightarrow 2(3+x)</math></li> <li>• <math>4x+x^4 \rightarrow 8x</math></li> </ul>
<i>Tentatives d'explications</i>	Notation de l'exposant non comprise ou souvenir approximatif de la définition littérale : $x^n$ signifie qu'il y a n « x » (ou respectivement le produit de n « x ») en omettant de préciser « le produit de n facteurs égaux à... », ce qui donne la somme de n termes égaux à x (ou respectivement, le produit de n par x)		
$x^2 = x$	x = 1 ou x = 0		
$x^2 \rightarrow x$		non prise en compte de l'exposant	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x+3x^2 \rightarrow 5x</math></li> <li>• <math>7x^2+2x^2 \rightarrow 9x</math></li> </ul>

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
$x \rightarrow x^2$  <i>Tentatives d'explications</i>		Analyse perceptive.  Dans les situations proposées ci-dessous, il se trouve deux arguments avec un « x »; l'élève les perçoit sans tenir compte de leur exposant. Le regroupement de $3x+5x \rightarrow 8x^2$ avec $2x+3x^2 \rightarrow 5x^2$ n'implique pas la même analyse qu'en la regroupant avec, par exemple, $4x^2+2x^5 \rightarrow 6x^7$ , qui alors impliquerait le théorème-en-acte ci-après : $ax^n+bx^p \rightarrow (a+b)x^{n+p}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x+3x^2 \rightarrow 5x^2</math></li> <li>• <math>3x+5x \rightarrow 8x^2</math></li> </ul>
$x^*x \rightarrow x$		Application d'une loi multiplicative sur les exposants. Pour l'élève, l'exposant d'un produit de puissances est peut-être le produit des exposants	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x*3x \rightarrow 6x</math></li> <li>• <math>2x(3x+1) \rightarrow 6x+2x</math></li> <li>• <math>(2x+1)(3x+2) \rightarrow 6x+4x+3x+2</math></li> </ul>
$ax^n+ax^p \rightarrow ax^{n+p}$  <i>Tentatives d'explications</i>		Factorisation de a puis loi additive sur les exposants de somme de puissance. $x^n+x^p$ est une somme non réductible sauf si $n=p$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>4x^2+4x^3 \rightarrow 4x^5</math></li> </ul>
$ax^n+bx^p \rightarrow (a+b)x^{n+p}$  <i>Tentatives d'explications</i>		Utilisation d'une loi additive sur les exposants $x^n + x^p$ n'est plus une puissance de x	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>4x^2+4x^3 \rightarrow 8x^5</math></li> <li>• <math>4x^2+2x^5 \rightarrow 6x^7</math></li> </ul>

Outre l'explication apportée à l'action ci-dessus, il est ici, envisageable de voir différentes interprétations de cette transformation :

- Une conception *descriptive* et *perceptive* de l'expression, sans y mettre de sens global : deux nombres (a et b), un signe (+) et une lettre (x, présente n et p fois), la multiplication n'étant pas visible. La réponse  $(a+b)x^{n+p}$  intègre tous ces objets.
- Une mauvaise compréhension de la définition de la réduction : « *réduire* une expression, c'est l'écrire comme une somme ayant *le moins de termes*. », perpétuée par certains manuels, cf. 1.2.2.
- Le dilemme appelé *process-product* par Davis [Davis, 1975] ou encore *acceptance of lack of closure* par [Collis, 1974] qui consiste à devoir achever les calculs. Or dans une somme comme  $7a+2$  il y a, à la fois, une addition et une multiplication et pourtant aucune des deux opérations ne peut être effectuée tant qu'une valeur n'a pas été donnée à a. Deux explications peuvent être apportées à ce dilemme : la rupture arithmétique-algèbre exposé en 1.3, « l'algèbre s'opposant ainsi à l'arithmétique où une loi de simplification impose l'achèvement des calculs » [Grugeon, 1995] et une règle de contrat didactique qui est de donner un résultat concis, comme dans tant d'exercices.

### 4.3.2 Les parenthèses

Les parenthèses servent à constituer de nouvelles *unités de signification*.

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
$(a+b) \rightarrow a+b$	Si la parenthèse est précédée du signe + ou de tout autre signe si b est nul	Non prise en compte des parenthèses	
Selon le contexte, les interprétations diffèrent :			
$k*(a+b) \rightarrow ka+b$	Si b est nul <i>et</i> si a est une variable (respectivement, un nombre), et k un nombre (respectivement, une variable)	Suppression brute de parenthèse avec <i>juxtaposition</i> de k et a, sans sens;	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>4(3x^2+2) \rightarrow 43x^2+2</math></li> <li>• <math>x(5+x) \rightarrow x5+x</math></li> <li>• <math>6(x+2) \rightarrow 6x+2</math></li> </ul>
<i>Tentatives d'explications</i>	Le signe * peut être omis devant une parenthèse. Cette omission pose des difficultés à l'élève et il est recommandé, en 5 <sup>e</sup> , d'utiliser cette convention d'écriture avec précaution.		
$k*(a+b) \rightarrow k*a+b$	b = 0 ou k = 1	Suppression de parenthèse.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>4(3x^2+2) \rightarrow 4*3x^2+2</math></li> <li>• <math>x(5+x) \rightarrow 5x+x</math></li> <li>• <math>-6(x^2+2) \rightarrow -6x^2+2</math></li> </ul>
$-(a+b) \rightarrow -a+b$	b = 0	Suppression de parenthèse en changeant le signe seulement du premier terme	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x-(3x^2*2) \rightarrow 2x-3x^2*2</math></li> <li>• <math>2x-(3x^2) \rightarrow 2x-3x^2</math></li> <li>• <math>2x-(3x^2+2) \rightarrow 2x-3x^2+2</math></li> </ul>
$(a+b)^n \rightarrow a+b^n$	a = 0 ou n = 1	Suppression brute de parenthèse sous un exposant	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(3+x)^2 \rightarrow 3+x^2</math></li> <li>• <math>(2x)^3 \rightarrow 2x^3</math></li> <li>• <math>(-x)^2 \rightarrow -x^2</math></li> </ul>
$Cd(a+b) \rightarrow Cda + Cdb$ ; avec o un opérateur	Si o est l'opérateur de la multiplication	distributivité de o sur l'addition distributivité de la multiplication sur l'addition	
<i>Tentatives d'explications</i>	Le schème du développement peut être déjà opératoire dans une certaine classe de situation. Par exemple, quand chaque facteur est une somme de deux termes ou quand le signe * est ou non visible.		

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
Or, pour que ce processus soit encore utilisable par le sujet dans de nouvelles situations, il faut qu'il soit capable de reconnaître des analogies, des invariants entre les deux situations. Par exemple, pour une nouvelle situation où le facteur ne consiste qu'en un terme ou quand au contraire, il est somme de 3 termes, il faudra qu'il repère que l'invariant est la présence de parenthèses, du signe *.... En revanche, il se peut que ce processus soit utilisé à mauvais escient, dans une classe trop large : ainsi, quand le signe opérateur est un +, ou quand la somme est en fait numérique sans présence de calcul littéral. « La reconnaissance d'invariants [pertinents] est donc la clef de la généralisation du schème. » [Vergnaud, 1990], p141. Nous rejoignons ce qui a été dit en 1.2.2 sur le double discours à tenir sur la technicité du développement : la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition -propriété non réciproque <sup>28</sup> - et l'obligation de l'acte du développement en présence de lettres.			
$C+(a+b) \rightarrow C+a + C+b$  <i>Tentatives d'explications</i>	La parenthèse est vue comme déclencheur de développement : la présence de parenthèses dans l'expression à développer ou à réduire est un <i>indice</i> qui permet à l'élève de prendre sa décision correctement parfois, incorrectement dans ce cas.	perceptif	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(1+2x)+(3x^2+2) \rightarrow 1+3x^2 + 1+2 + 2x+3x^2 + 2x+2</math></li> <li>• <math>3+(x+2) \rightarrow 3+x+3+2</math></li> </ul>
$C-(a+b) \rightarrow C-a + C-b$	idem	idem	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x - (3x^2+2) \rightarrow 2x-3x^2+2x-2</math></li> <li>• <math>(1 + 2x) - (3x^2 + 2) \rightarrow 1-3x^2 + 1-2 + 2x-3x^2 + 2x-2</math></li> </ul>

### 4.3.3 Le signe moins

Le signe moins est à la fois « prédicatoire » [Baruk, 1992], en annonçant la nature d'un nombre et opérateur, comme annonçant l'opposé d'un nombre et aussi l'opération de soustraction. Cette triple utilisation est créatrice de confusions, d'autant plus importante en calcul littéral puisque une variable « x » peut à la fois représenter un nombre positif et négatif.

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
$-a+... \rightarrow a+...$		$-a+... \rightarrow 0-a$ L'écart entre 0 et a est de a le signe moins est vu comme un opérateur de soustraction	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>-5x+2x \rightarrow -7x</math></li> <li>• <math>-2x-2x \rightarrow -4x</math></li> <li>• <math>-2x+x-2x \rightarrow -3x</math></li> </ul>
$-a+... \rightarrow -(a+...)$		Le signe moins est le signe de toute l'expression qui suit. Il est vu comme prédicatoire	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>-5x+2x \rightarrow -7x</math></li> <li>• <math>-2x-2x \rightarrow -4x</math></li> <li>• <math>-2x+x-2x \rightarrow -3x</math></li> <li>• <math>-3+7x+x \rightarrow -3+8x</math></li> </ul>

<sup>28</sup> Il existe des opérations qui sont indifféremment distributive l'une sur l'autre : intersection, union d'ensembles...

Théorème-en-acte ou règle d'action	Domaine de validité	Description, explications	Exemples
$-(\Sigma \text{argumentPositifs} + \Sigma \text{argumentNégatifs})$ $\rightarrow \Sigma \text{argumentPositifs} - \Sigma \text{argumentNégatifs}$		Le signe moins ne s'applique qu'aux arguments négatifs. Il est vu comme l'opérateur opposé	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>-(3-6+x-y) \rightarrow 3+6+x+y</math></li> </ul>
$a-b-c \rightarrow a-(b-c)$		La soustraction est perçue comme étant associative	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>-5x-2x-3x \rightarrow -4x</math></li> <li><math>-2x-2x \rightarrow 0-2x-2x \rightarrow 0-0</math></li> </ul>
<i>Tentatives d'explications</i>		A nouveau, les propriétés des opérations de l'addition et de la multiplication sont projetées : ici, la soustraction admet la propriété d'associativité.	

Ainsi l'étude de ces trois objets permet de préciser les "besoins" concernant le savoir-faire « réduire », cf. schéma 9. Il est nécessaire pour maîtriser ce savoir-faire dans sa globalité de connaître ces trois notions, leurs usages, leurs utilisations... Par exemple, sans la factorisation et la conceptualisation qui lui est associée, le schème de la réduction ne peut pas fonctionner correctement dans toutes les situations et nous rejoignons alors l'idée de Vergnaud puisque pour lui, « un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite. » [Vergnaud, 1990].

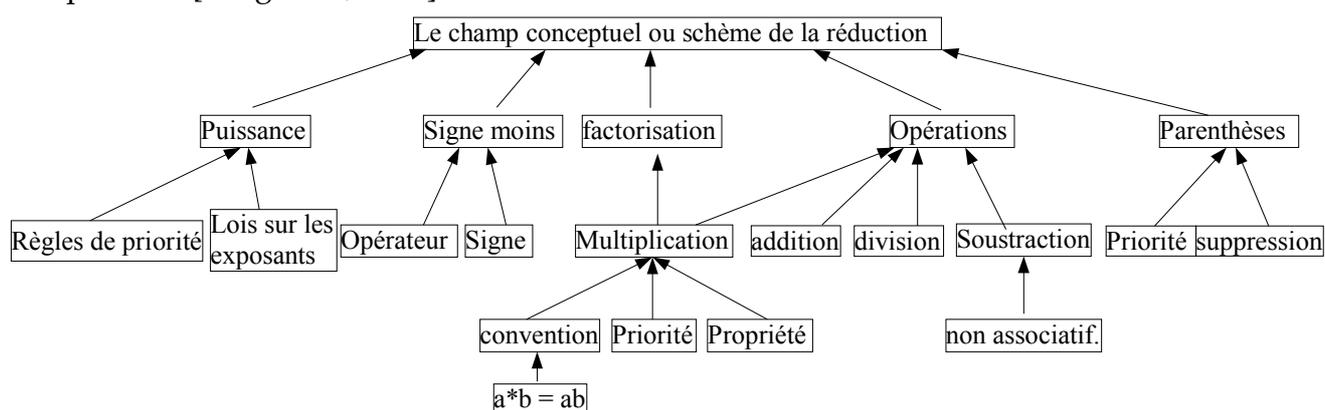


schéma 9

Un exemple de décomposition non exhaustive du savoir-faire "réduire", qui s'inscrit lui-même dans celui du calcul littéral

#### 4.4 Septième conclusion

Les schèmes d'action du développement et de la réduction semblent encore fragiles chez l'élève du secondaire : leurs pratiques sont mal aisées et sources d'erreurs. Cependant, nous avons conscience qu'un même élève peut donner telle réponse un jour et telle autre le lendemain en étant néanmoins dans le même contexte. Or, pour nommer une erreur *conception*, il faut une forme de stabilité des actions utilisées par l'élève. C'est pourquoi, il est nécessaire de regrouper les règles de transformations écrites au sein d'Anais afin de construire, par corrélation de différentes règles, des théorèmes-en-acte, a priori. Par exemple, les règles suivantes peuvent être regroupées en vue de décélérer la non prise en compte des parenthèses :

ER_SupprParenthesesBrute_dvt	}	Suppression de parenthèse dans des contextes différents
ER_SupprParenthesesBrute_dvt2		
ER_SupprParenthesesBrute_exp		
ER_SupprParenthesesBrute		
ER_a_Fois1erDeSomme		
ER_Moins_a_Fois1erDeSomme		
ER_ax_Fois1erDeSomme		
ER_Moins_Fois1erDeSomme		
ER_Moins1erSomme_Coefficient		

Une

expérimentation a été construite, cf. Annexe 8 puis lancée dans une classe de 4<sup>e</sup> et une de 2<sup>nde</sup>, de niveau faible, afin de mettre en évidence les corrélations entre contextes et actions d'élèves relatives aux trois notions : puissance, parenthèse et signe moins. Son analyse est en cours.

## V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif de ce travail était de modéliser les connaissances d'élèves en algèbre, domaine que nous avons restreint au développement et réduction d'expressions polynomiales à coefficients entiers. Le choix de l'outil de modélisation s'est porté sur un environnement informatique, constitué des logiciels Aplusix et Anais :

\* Le logiciel Aplusix offre un cadre proche du papier/crayon, tout en permettant de conserver des traces fines des productions des élèves ;

\* Le logiciel Anais, quant à lui, permet d'interpréter les transformations des élèves en produisant un diagnostic automatisé de règles. En outre, les fréquences d'emploi de celles-ci peuvent être visualisées, résultat précieux pour construire un diagnostic de conceptions, but final de la modélisation.

Cependant, dans le domaine du développement-réduction d'expressions polynomiales à coefficients entiers, domaine que nous espérons étendre prochainement à celui d'expressions polynomiales à coefficients fractionnaires puis irrationnels, ce niveau de modélisation n'a pas encore été atteint.

Notre travail a permis, dans un premier temps, de construire un diagnostic de règles grâce à une implémentation de règles écrites au vue des productions des élèves. Après une comparaison fine avec une analyse manuelle des protocoles, provoquant des retours réguliers sur l'écriture des règles, le diagnostic s'est révélé pertinent et fiable. Néanmoins, le diagnostic est susceptible d'être amélioré par un affinage de son heuristique. En effet, la distance, utilisée pour le diagnostic, pourrait être améliorée en donnant des coûts proportionnels soit à une hiérarchie établie des règles, soit à leur taux d'apparition. Incrémenter une probabilité à chaque règle, tenant compte de tous les exercices traités par un même élève, est aussi un des axes des travaux envisageables ultérieurement. Ainsi, entre deux diagnostics de même coût, Anais pourrait, alors, choisir lequel est le plus

pertinent à conserver au vue de l'ensemble des erreurs de ce même élève. Cela demanderait une corrélation fine entre chaque règle, rejoignant le travail entrepris sur les conceptions.

Dans un second temps, notre travail a suscité l'émergence de grandes notions encore mal maîtrisées par les élèves. Une expérimentation en cours, basée sur l'étude de ces notions, cherche à valider les théorèmes-en-acte, construits a priori. Le travail commencé mérite donc d'être poursuivi dans cette voie afin de construire un diagnostic de conceptions présentant, à l'enseignant, une représentation globale de la connaissance de ses élèves.

Ces résultats s'inscrivent dans le projet de concevoir des stratégies de remédiation aux conceptions erronées qui passeront, peut-être, par la construction d'un tuteur artificiel.

## Bibliographie

- [Artigue, 1996] : M. Artigue, *Actes de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques*, St. Sauves en Auvergne, 1996.
- [Balacheff, 1994] : N. Balacheff, *Didactique et intelligence artificielle*, Recherche en didactique des Mathématiques, Vol. 14, n°12, p9-42, Editions La Pensée Sauvage, 1994.
- [Balacheff, 2002] : N. Balacheff, *Cadre, registre et conception*, Les Cahiers du laboratoire Leibniz n°58, 2002.
- [Baron, 1995] : M. Baron, *EIAO : Quelques repères*, Revue Terminal, 1995.
- [Baruk, 1992] : S. Baruk, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Editions du Seuil, 1992.
- [Booth, 1984] : L. Booth, *Erreurs & incompréhensions en algèbre élémentaire*, Petit X n°5, IREM de Grenoble, 1984.
- [Bouhineau et al, 2001] : D. Bouhineau, J.F. Nicaud, X. Pavard, E. Sander, *Un micromonde pour aider les élèves à apprendre l'algèbre*, sixièmes journées francophones Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur EAIO'2001, 2001.
- [Bouhineau et al. 2003] : D. Bouhineau, A. Bronner, H. Chaachoua, T. Huguet., *Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en Algèbre*, Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain Strasbourg, 2003.
- [Bouvier et al, 1993] : A. Bouvier, M. Georges, F. Le Lionnais, *Le dictionnaire des mathématiques*, Presses Universitaires de France, 1993.
- [Brousseau, 1983] : G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 4-2, Editions La Pensée Sauvage, 1983.
- [Brousseau, 1990] : G. Brousseau, *Le contrat didactique, le milieu*, Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 9.3, Editions La Pensée Sauvage, 1990.
- [Brousseau, 2000] : G. Brousseau, *les erreurs des élèves en mathématiques*, Petit X n°57, IREM de Grenoble, 2000.
- [Brown et Burton, 1978] : J.S. Brown and R.R. Burton, *Diagnostic models for procedural bugs in basis mathematical skills*, Cognitive Science, 2, 155-191, 1978.
- [Brown, 1983] : J.S. Brown, *Learning by doing revisited for electronic learning environments*, The future of electronic learning, In White, M.A., Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1983.
- [Carbonell, 1970] : J.R Carbonell, *AI in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction*, IEEE Transactions on Man-Machine Systems, 11, 4, 190-202, 1970.
- [Charnay & Mante, 1992] : Charnay Roland & Mante Michel, *De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-mediation*, Repères n° 7, IREM de Lyon, 1992.
- [Chevallard, 1984] : Y. Chevallard, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : l'évolution de la transposition didactique*, Petit X n° 5, IREM de Grenoble, 1984.
- [Chevallard, 1989] : Y. Chevallard, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2ème partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*, Petit X n°19, IREM de Grenoble, 1989.
- [Chevallard, 1998] : Y. Chevallard, *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, 1998.
- [Collis, 1974] : Collis, *A study of concrete and formal operations in school mathematics : a piagetian viewpoint*, in Australian council for Educational Research, Melbourne, 1974.
- [Combiér, 1996] : G. Combiér, *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP, 1996.

- [Davis, 1975] : R.B. Davis, *Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations*, The journal of Children's Mathematical Behaviour, 1, n°3, 1975.
- [Douady, 1984] : R. Douady, *Dialectique outil/objet et jeux de cadre*, Thèse d'état, Université Paris 7, 1984.
- [Drouhard, 1992] : J.P. Drouhard, *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1992.
- [Grugeon, 1995] : B. Grugeon, *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*, thèse de doctorat en didactique des mathématiques, IREM Paris VII, 1995.
- [Kieran, 1991] : C. Kieran, *A Procedural- Structural Perspective on Algebra Research*, Proceedings of Psychology of Mathematics Education, Furinghetti F (eds), Assise, Italy, 1991.
- [Kieran, 1992] : C. Kieran, *The learning and teaching of school algebra*, In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grows (ed), pp. 390-419, New-York Macmillan, 1992.
- [Küchemann, 1981] : D.E. Küchemann, *Children's understanding of mathematics*, Algebra. In Hart, K. (Ed.), London: J. Murray, 1981.
- [Mendelsohn & Dillenbourg, 1991] : Patrick Mendelsohn & Pierre Dillenbourg, *Le développement de l'enseignement intelligemment assisté par ordinateur*, Conférence donnée à la réunion de Association de Psychologie Scientifique de Langue Française Symposium Intelligence Naturelle et Intelligence Artificielle, Rome, 1991.
- [Nicaud et al, 2005] : Ouvrage collectif, *Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique*, ACI financée par le ministère de la recherche, 2005.
- [Nicaud, 1993] : J.F. Nicaud, *SIM version 1.1, Manuel de Référence*, Rapport du laboratoire LRI (Orsay) n° 866, 1993.
- [Nicaud, 1994] : J.F. Nicaud, *Modélisation en EIAO, les modèles d'Aplusix*, Recherche en didactique des Mathématiques, Vol 14/1.2, pp 67-112, Editions La Pensée Sauvage, 1994.
- [Nimier, 1976] : J. Nimier, *Mathématique et affectivité*, Collection PERNOUD, STOCK, 1976.
- [Papert, 1980] : Papert, *Mindstorm; Trad. Française : Jaillissement de l'esprit*, Flammarion, 1980.
- [Sander et al., 2005] : E. Sander, J-F. Nicaud, H. Chaachoua, M-C. Croset, *From usage analysis to automatic diagnosis : the case of the learning of algebra*, à paraître, 2005.
- [Sfard, 1991] : Sfard, : *On the dual nature of mathematics conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, Vol 22, pp. 1-36., 1991.
- [Tonnelles, 1979] : J. Tonnelles, *Le monde clos de la factorisation au 1er cycle*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux, 1979.
- [Vergnaud, 1986] : G. Vergnaud, *Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre*, Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, Editions La Pensée Sauvage, 1986.
- [Vergnaud, 1987] : G. Vergnaud, *Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles*, Problème épistémologiques et didactiques in Actes du Colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Editions La Pensée Sauvage, 1987.
- [Vergnaud, 1990] : G. Vergnaud, *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10/2.3, pp 133-170, Editions La Pensée Sauvage, 1990.
- [Wenger 1987] : E. Wenger, *Artificial intelligence and tutoring systems*, Morgan Kaufmann Publishers, 1987.

## Annexe 1

### Programmes officiels de collège sur le développement-réduction proprement dit

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
<b>6ème</b>		
Initiation aux écritures littérales.	Appliquer une formule littérale dans une situation familière à l'élève.	On entraînera l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques.
<b>5ème</b>		
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	Connaître et utiliser les identités : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens.	La distributivité est à connaître sous forme générale d'identité. La comparaison avec une formulation en français – « le produit d'un nombre par la somme de deux nombres est égal à la somme des produits du premier par chacun des deux autres »...– pourra être l'occasion de montrer un intérêt (en économie et précision) de l'écriture symbolique. On entraînera les élèves à la convention usuelle d'écriture $bc$ pour $b \times c$ , $3a$ pour $3 \times a$ . Les applications donnent lieu à deux types d'activités bien distinctes : le développement qui correspond au sens de lecture de l'identité indiquée, et la factorisation qui correspond à la lecture « inverse » $ka + kb = k(a + b)$ . Cette réversibilité se retrouve dans l'initiation à la résolution d'équations.
<b>4ème</b>		
	Réduire une expression littérale à une variable, du type: $3x - (4x - 2)$ , $2x^2 - 3x + x^2 \dots$	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en recherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul. Le travail proposé s'articule sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. Les situations proposées aux élèves doivent exclure tout type de virtuosité et répondre chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique). On évitera en particulier les expressions à plusieurs variables introduites a priori.
Développement	Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a + b)(c + d)$ . Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	Les activités de développement poursuivent celles de 5 <sup>e</sup> en utilisant l'identité $k(a + b) = ka + kb$ . L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prendra tout son intérêt. Le développement de certaines expressions du type $(a+b)(c+d)$ peut conduire à des simplifications d'écriture, mais les identités remarquables ne sont pas au programme. L'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas ce type d'expression en une somme de termes. La factorisation d'expressions analogues à $x(3x+4) - 5(3x+4)$ n'est pas au programme.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
<b>3ème</b>		
Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ ; $(2x+1)2+(2x+1)(x+3)$ . Connaître les égalités : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ; $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $1012 = (100+1)2 = 1002+200+1$ , $(x+5)^2-4 = (x+5)^2-2^2 = (x+5+2)(x+5-2)$ .	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : - utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; - utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

## Annexe 2

### Extraits du dictionnaire des mathématiques élémentaires de Baruk et du dictionnaire des mathématiques de Bouvier

## Développer, développable, développement

*développer* : v. tr., XII<sup>e</sup> s., origine obscure ; *développable* : adj., 1811 ; *développement* : n. m., XV<sup>e</sup> s.

**a.** Déplier, étendre ce qui est enveloppé ; on rencontre cette acception surtout au sens figuré : *développer un récit, une argumentation.*

**b.** Faire croître, donner de l'ampleur, de l'étendue : *développer le corps par l'exercice, l'esprit par la lecture, l'observation ; des sociétés qui se développent grâce à une bonne gestion.*

### 1. Arithmétique et algèbre

**a.** Quand il est demandé de développer une expression donnée, c'est qu'elle a généralement la \*forme d'un \*produit et qu'on aimerait lui voir prendre la forme de ce qu'on appelle une \*somme algébrique : il s'agit donc de \*distribuer, soit un terme sur plusieurs, soit deux, soit plusieurs termes sur plusieurs. Par exemple :

- $a(b + c - d)$  est un produit ; en distribuant le \*facteur simple,  $a$ , sur les trois termes de la parenthèse, on aura développé ce produit :

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

forme produit      forme somme

- $(a + b)(c - d + e)$  est un produit ; on le développe en distribuant, cette fois, les deux termes,  $a$  et  $b$ , du premier facteur sur les trois termes du second :

$$(a + b)(c - d + e) = ac - ad + ae + bc - bd + be$$

forme produit                      forme somme

C'est sur le second exemple, mieux que sur le premier, que l'on voit apparaître l'idée de déploiement, de développement.

**b.** "Développer" est généralement suivi de \*réduire (II, 2, b) ; on pourra voir que, lorsque des développements sont suivis de réductions de termes semblables, le résultat final prend parfois moins de place que l'énoncé, comme, en particulier, dans l'exemple bien connu de l'identité \*remarquable :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

**c.** Le mot "développer" est souvent remplacé dans les énoncés par \*effectuer.

**d.** (D) "Développer" est souvent utilisé inutilement, et comme mécaniquement, semble-t-il, dans certains énoncés tels que "développer et réduire".

- $A = \frac{5x-8}{3} + \frac{4x-3}{2}$  : comme il n'y a rien à développer, et que le calcul principal porte sur une réduction au même dénominateur, les auteurs de l'exercice ont peut-être voulu éviter de dire "réduire au même dénominateur, puis réduire", c'est-à-dire éviter d'utiliser \*réduire (II, 3) dans deux sens différents. Dans ce cas, il est plus simple de demander d'effectuer puis de réduire.

- $B = 8 - (x + 5) + (3 - y)$  : ici, l'utilisation de "développer" est complètement hors de propos, il suffit de demander de réduire.

## 2. Réduire une expression numérique ou littérale

a. Réduire, c'est 'compter ensemble' les termes semblables afin d'en éviter la répétition, et certains exercices ne sont destinés qu'à cela. Par exemple, s'il est demandé de réduire l'expression :

$$A = 5 + a + 2b - 2 - 3a - b - 7 + 5b + 10a,$$

elle comporte trois 'sortes' d'unités, deux qui sont \*littérales, les "a", les "b", et une qui est numérique. En comptant ensemble les "a", on en trouve 8 ; en recommençant avec les b, on en trouve 6 ; et en comptant "5" avec "- 2" et "- 7", on trouve - 4. D'où l'expression réduite de A :

$$A = 8a + 6b - 4.$$

b. *Réduire* est très souvent accompagné de *développer* dans l'expression "développer et réduire", où \*développer (II, 1) se justifie généralement par le sentiment d'un déploiement de l'écriture, et *réduire* par le sentiment contraire, celui d'un resserrement, d'une 'diminution de volume'. Ces deux mots sont particulièrement indiqués quand ils prescrivent les calculs que mettent en jeu les \*polynômes (II, IV). Par exemple :

$$P(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

est un polynôme en x du cinquième degré, puisqu'il est le \*produit d'un facteur du premier degré par un facteur du quatrième degré.

L'expression produite par la distribution des deux termes du premier facteur sur les cinq du second comporte donc dix termes, c'est le développement ; les termes semblables, ici, se *neutralisent*, et, sur les dix termes obtenus, il n'en reste plus que deux, c'est la réduction.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ &\quad \text{développement} \\ &= x^5 - 1. \\ &\quad \text{réduction} \end{aligned}$$

c. *Réduire* est souvent remplacé par \*simplifier.

### Développement

Lorsqu'un produit AB est une factorisation d'une somme C + D ou d'une différence C - D, on dit que le produit AB a pour développement la somme C + D ou la différence C - D. Exemples : pour tous réels x, y et z, les sommes ou différences  $xy - xz$ ,  $x^2 + 2xy + y^2$ ,  $5x^3y + 20xy^2 - 10xy$  sont respectivement les développements de  $x(y - z)$  (distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction), de  $(x + y)^2$  et de  $5xy(x^2 + 4y - 2)$ .

V. FACTORISATION, IDENTITÉ.

### Annexe 3 Exemple de fichier de trace brute et de protocole d'élève.

#### Le protocole brut, lisible par le magnétoscope :

```
%;ACTIONS;#Heure=14:26:49;#TypeProbleme=Développer, réduire et ordonner
1;0.0;enonce;();0;9x-(-4+5x)-(5x+10);();(0 0 devant);rien;
2;6.4;nouvelle;();1;?;();(0 dedans);rien;
3;5.1;9;();1;9;();(derriere);rien;
4;1.1;x;();1;9x;();(1 derriere);rien;
5;2.6;+;();1;9x+?;();(1 dedans);rien;
6;1.2;4;();1;9x+4;();(1 derriere);rien;
7;4.5;-;();1;9x+4-?;();(2 0 dedans);rien;
8;1.2;5;();1;9x+4-5;();(2 0 derriere);rien;
9;1.0;x;();1;9x+4-5x;();(2 0 1 derriere);rien;
10;3.5;-;();1;9x+4-5x-?;();(3 0 dedans);rien;
11;1.1;5;();1;9x+4-5x-5;();(3 0 derriere);rien;
12;2.8;x;();1;9x+4-5x-5x;();(3 0 1 derriere);rien;
13;1.0;-;();1;9x+4-5x-5x-?;();(4 0 dedans);rien;
14;0.8;1;();1;9x+4-5x-5x-1;();(4 0 derriere);rien;
15;0.4;0;();1;9x+4-5x-5x-10;();(4 0 1 derriere);rien;
16;2.0;nouvelle;();2;?;();(0 dedans);rien;
17;5.0;placerCurseur;();1;9x+4-5x-5x-10;();(2 0 1 derriere);rien;
18;11.0;placerCurseur;();2;?;();(dedans);rien;
19;7.3;9;();2;9;();(derriere);rien;
20;0.7;x;();2;9x;();(1 derriere);rien;
21;6.8;-;();2;9x-?;();(1 0 dedans);rien;
22;0.4;6;();2;9x-6;();(1 0 derriere);rien;
```

#### Le protocole, sur lequel se base Anais :

```
Eleve hele; Développer, réduire et ordonner; 9x-(-4+5x)-(5x+10); 19/11/2002; 14:26:49;
Etape 1, action 15, étape mère 0; transformation correcte; (diag <<9x-(-4+5x)-(5x+10) -->
9x+4-5x-5x-10>>)
BUT : 9x-(-4+5x)-(5x+10) --> 9x+4-5x-5x-10
SOUS-BUT : -(-4+5x)-(5x+10) --> 4-5x-5x-10
transfo : -(-4+5x)-(5x+10) --> -(-4+5x)-5x-10;-(-5x+10) --> (-1)5x+(-1)10;
SOUS-BUT : -(-4+5x) --> 4-5x
transfo : -(-4+5x) --> 4-5x;
RETOUR EN ARRIERE
RETOUR EN ARRIERE
Etape 2, action 22, étape mère 1;transformation ERRONEE;(diag <<9x+4-5x-5x-10-->9x-6>>)
BUT : 9x+4-5x-5x-10 --> 9x-6
SOUS-BUT : 4-5x-5x-10 --> -6
transfo : 4-5x-5x-10 --> 4-10;-5x-5x --> 4-10;
transfo : 4-10 --> -6;
```

#### Annexe 4

### Intégration de deux nouvelles règles pour traiter le problème d'insertion du signe « = » au cours d'un exercice de développement/réduction ou sa disparition lors d'une résolution d'une équation.

Règle pour traiter la disparition d'une relation	Règle pour traiter l'apparition d'une relation
<pre> {[nom ER_DisparitionRelation]  [Com "Une relation disparaît"]  [sorteDe ConfusionRelation]  [statut errone]  [si (  (?e APourOperateurRelationnel)  (non (?but APourOperateurRelationnel) ))]  [alors ( ?but )]  [NiveauAbstraction {[ModeleA Fin] }]  [NiveauMaitrise {[ModeleA Moyen]]}  [CoutCalcul {[ModeleA Faible]]}] </pre>	<pre> {[nom ER_IntroductionRelation]  [Com "Une relation apparaît"]  [sorteDe ConfusionRelation]  [statut errone]  [si (  (non (?E APourOperateurRelationnel))  (?but APourOperateurRelationnel) )]  [alors ( ?but )]  [NiveauAbstraction {[ModeleA Fin] }]  [NiveauMaitrise {[ModeleA Moyen]]}  [CoutCalcul {[ModeleA Faible]]}] </pre>

### Annexe 5

#### Liste des exercices proposés pour EXP92.

4ème	3ème
Développer et réduire $4(3x^2-6+7x)$ ;	Réduire et ordonner; $5x^2+3x-7-3x^2+2x+8$ ;
Résoudre ; $9x=27/2$ ;	Calculer ; $(-3-6)*(6-8)$ ;
Réduire ; $-2x^2+3x-7-x-2x^2-8$ ;	Résoudre ; $x+2=-3$ ;
Résoudre ; $-9=x-7$ ;	Développer, réduire et ordonner; $7x+(2x-8)-(-3x+12)$ ;
Réduire ; $\{4/3\}x+\{7/6\}x+8$ ;	Calculer ; $(-2)*(-5)*3+(-2)*(-4)$ ;
Résoudre ; $-\{1/4\}x=6$ ;	Résoudre ; $9-x=12$ ;
Réduire ; $5x^2+3x-7-3x^2+2x+8$ ;	Développer, réduire et ordonner; $2-3(-5x-5)+5(4x+8)$ ;
Résoudre ; $8x-11=7+10x$ ;	Résoudre ; $4x=16$ ;
Factoriser ; $6x^2-8x$ ;	Factoriser ; $8a+8b$ ;
Résoudre ; $-x+2=7+x$ ;	Résoudre ; $5x=9$ ;
Développer et réduire $5x(-2+3x)-8x(-5x+8)$ ;	Développer, réduire et ordonner; $7x(3x+5)$ ;
Résoudre ; $\{3/8\}x=4$ ;	Factoriser ; $8a+40$ ;
Développer et réduire $-3(-7+2x)+4(7+6x^2)$ ;	Développer, réduire et ordonner; $(9x-5)(-6x+2)$ ;
Résoudre ; $-4x=-27$ ;	Factoriser ; $12x^2-7x$ ;
Développer et réduire $\{-10/9\}(\{-6/\{-5\}\}x+3)$ ;	Résoudre ; $8x-4=3x-2$ ;
Résoudre ; $11-x=-12$ ;	Réduire et ordonner; $10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6$ ;
Développer et réduire $4x(-1-7x)$ ;	Calculer ; $-9*(-2)-7*(-6+2)$ ;
Résoudre ; $-3+2x=-2x-2$ ;	Résoudre ; $10+x=-8$ ;
Réduire ; $10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6$ ;	Développer, réduire et ordonner; $9x-(-4+5x)-(5x+10)$ ;
Résoudre ; $-\{7/2\}x=5$ ;	Résoudre ; $5x=25$ ;
Réduire ; $3x-18+3x+6+5x^2$ ;	Calculer ; $4/3+7/6$ ;
Résoudre ; $7=28x$ ;	Développer, réduire et ordonner; $4x(-1-7x)$ ;
Réduire $2/5-3x-5x-1/7$ ;	Résoudre ; $x/3=-7$ ;
Résoudre ; $2=-x+15$ ;	Calculer ; $2/5-1/7$ ;
Développer et réduire $5(6x+12)$ ;	Développer, réduire et ordonner; $10(-4x-1)-2(4x^2-6)$ ;
Résoudre ; $x/7=3$ ;	Résoudre ; $-8=-7x+5$ ;
Factoriser ; $-12x+27x^2$ ;	Calculer ; $\{-10/9\}*\{-6/\{-5\}\}$ ;
Résoudre ; $12-6x=-15x-3$ ;	Développer, réduire et ordonner; $(1+5x)(2x-3)$ ;
Développer et réduire $7x(3x+5)$ ;	Résoudre ; $-2x+8=3+2x$ ;
Résoudre ; $-11x=-22/2$ ;	Calculer ; $7-5*5-2$ ;
	Résoudre ; $7x=4/5$ ;

Les exercices en gris foncés correspondent à notre domaine;  
 en gris clair, des exercices de réduction hors domaines (soit numériques soit à coefficients fractionnaires);  
 non surlignés, des exercices hors domaine (soit équation soit factorisation)

## Annexe 6

### Liste des règles implantées dans Anais pour le domaine développement-réduction

#### Les règles de développement

Seules les 28 règles erronées sont énumérées ci-dessous;  
il y a aussi 8 règles de résolution et 1 règle générale.

#### **ER\_Distribution**, com= erreur dans le developpement

ER\_a\_Fois1erDeSomme, com= distribution sur 1er terme somme

ER\_Moins\_a\_Fois1erDeSomme, com= distribution d'un element sur 1er terme somme

ER\_a\_Fois2ndDeSomme, com= distribution sur 2nd terme somme

ER\_Moins\_a\_Fois2ndDeSomme, com= distribution sur 2nd terme somme

ER\_Somme\_Plus\_Somme, com= distributivite du signe + d'une somme sur une somme

ER\_Terme\_Plus\_Somme, com= distributivite du signe + d'un terme sur une somme

ER\_Somme\_Moins\_Somme, com= distributivite du signe - d'une somme sur une somme

ER\_Terme\_Moins\_Somme, com= distributivite du signe - d'un terme sur une somme

ER\_SommePlusSommeDonneSommeFoisSomme, com=  $(a+b)+(c+d) \rightarrow ac+ad+bc+bd$

ER\_TermePlusSommeDonneTermeFoisSomme, com=  $a+(c+d) \rightarrow ac+ad$

ER\_SommeMoinsSommeDonneSommeFoisMoinsSomme, com=  $(a+b)-(c+d) \rightarrow -ac-ad-bc-bd$

ER\_TermeMoinsSommeDonneTermeFoisMoinsSomme, com=  $a-(c+d) \rightarrow -ac-ad$

ER\_Pertex\_Dvt, com= perte du x lors d'une distribution d'un monome de degre 1 sur une somme

ER\_Pertex\_Dvt2, com= perte du x lors d'une distribution d'une somme sur une somme

ER\_Pertex\_Dans\_x^2Dvt, com= perte du x dans  $x^2$  lors d'une distribution d'une somme sur somme

ER\_Pertex\_Dans\_x^2Dvt2, com= perte du x dans  $x^2$  lors d'une distribution d'un terme sur somme

ER\_ax\_Fois1erDeSomme, com= distribution d'un terme sur 1er terme somme

ER\_ax\_Fois2ndDeSomme, com= distribution d'un terme sur 1er terme somme

#### **ER\_Signe\_Distribution**, com= erreur de signe dans le developpement

ER\_Moins\_Fois2ndDeSomme, com= distribution du signe sur 2nd terme somme

ER\_Moins1erSomme\_Coefficient, com= distribution du signe sur 1er terme somme, le coefficient correctement distribue

ER\_Moins2ndSomme\_Coefficient, com= distribution du signe sur 2nd terme somme, le coefficient correctement distribue

ER\_Moins2ndSomme\_Monome, com= distribution du signe sur 2nd terme somme, le monome correctement distribue

ER\_Moins\_FoisNbNegatifsDeSomme, com= distribution du signe moins sur nbNegatifs seulement

ER\_Moins\_FoisNbPositifsDeSomme, com= distribution du signe moins sur nbPositifs seulement

ER\_Moins\_Fois1erDeSomme, com= distribution du signe sur 1er terme somme

ER\_Moins\_FoisAucunDeSomme, com= aucune distribution du signe moins sur somme

**ER\_xx\_vaut\_x\_Dvt**, com= perte du carre dans le developpement, ex:  $3x(2x+1) = 6x+3x$

ER\_PerteCarre\_Dvt, com= perte du carre lors d'une distribution d'un monome de degre1 sur une somme

ER\_PerteCarre\_Dvt2, com= perte du carre lors d'une distribution d'une somme sur une somme

### Les règles de réduction

*Seules les 44 règles erronées sont énumérées ci-dessous;  
il y a aussi 70 règles de résolution.*

**SuppresParentheses**, com= suppression de parenthèses

ER\_SupprParenthesesBrute, com= sup. brute de parenthèses

ER\_SupprParenthesesBrute\_exp, com= sup. brute de parenthèses sous exposant

ER\_SupprParenthesesBrute\_dvt, com= sup. brute de parenthèses lors d'un dvt :  
 $(x+2)(3+x) \rightarrow x+23+x$

ER\_SupprParenthesesBrute\_dvt2, com= sup. brute de parenthèses lors d'un dvt :  
 $4(3+x) \rightarrow 43+x$

ER\_SupprParenthesesBrute\_dvt3, com= sup. brute de parenthèses lors d'un dvt :  
 $4(3+x) \rightarrow 4+3+x$

**GroupelementAdditif**, com= Groupelement additif, Ex:  $2x+3x \rightarrow 5x$

**ER\_Somme\_MonomesDegreDifferent**, com= Groupelement additif errone de monomes de degre different, Ex:  $2+3x \rightarrow 5x$

ER\_constant\_plus\_variable\_donne\_variable, com= Somme d'une constante et du coefficient d'un monome de degre non nul, ex:  $2+3x^2 \rightarrow 5x^2$

ER\_constant\_plus\_variable\_donne\_constant, com= Somme d'une constante et du coefficient d'un monome de degre non nul, ex:  $2+3x \rightarrow 5$

ER\_degré1\_plus\_degré2\_donne\_degré1, com=  $ax+bx^2 \rightarrow (a+b)x$ , ex:  $7x + 2x^2 \rightarrow (7+2)x$

ER\_degré1\_plus\_degré2\_donne\_degré2, com= Somme des coefficients d'un monome de degre 1 et d'un monome de degre 2, ex:  $7x + 2x^2 \rightarrow 9x^2$

ER\_DegréhPlusDegrek\_Donne\_DegrehPlusk, com= Somme des coefficients d'un monome de degre h et d'un monome de degre k, ex:  $7x + 2x^2 \rightarrow 9x^3$

ER\_SommeDegreMonomeCoeffIdentique, com= Somme uniquement des degres d'un monome de degre h et d'un monome de degre k, ex:  $ax + ax^2 \rightarrow ax^3$

ER\_SommeDegreMonomes, com= Somme des coefficients et des degres dans une somme de monomes de degre 1 et 2, ex:  $7x+2x^2+3x \rightarrow 12x^4$

**ER\_Signe**, com= erreur de signe dans un Groupement Additif

ER\_2TermesNegatifsDonneNul, com= Termes egaux negatifs s'annulent, ex:  $-2x - 2x \rightarrow 0$

ER\_2TermesNegatifsDonneNul\_DansSomme, com= Termes egaux negatifs donne vide dans une somme, ex:  $-2x+x-2x \rightarrow x$

ER\_2TermesPositifsDonneNul\_DansSomme, com= Termes egaux donne vide dans une somme ou il y a presence d'un moins, ex:  $2x -6 + 2x \rightarrow -6$

ER\_OubliSigneMoins, com=  $ax - bx$  Donne  $(a+b)x$ , ex:  $7x - x \rightarrow 8x$

ER\_AjoutSigneMoins, com=  $ax - bx$  Donne  $-(a+b)x$ , ex:  $2x-5x \rightarrow -7x$

ER\_MoinsVuOperateur, com=  $-a + b$  Donne  $-(a+b)$  : signe moins est vu comme le signe de toute l'expression, ex:  $-6x-4x \rightarrow -2x$

ER\_InversionSigneSomme, com= inversion du signe d'une somme en presence d'un signe moins, ex:  $7x+3-2x \rightarrow -7x-3+2x$

ER\_InversionSigneResultat, com= inversion du signe d'un resultat en presence d'un signe moins, ex:  $-3+7x+x \rightarrow -3-8x$

ER\_Commutativite, com=  $(a+b)-(c+d) \rightarrow (b+d)-(c+a)$  avec a et c (resp. b et d) de même degre formel 1 ou 0

**ER\_Priorite**, com= erreur de priorité

ER\_SoustractionPrioritaireCorpsId, com=  $ax-x \rightarrow a$

ER\_SoustractionPrioritaireParenthese, com=  $a-b(Q) \rightarrow (a-b)Q$ ; a et b rationnels, Q quelconque

ER\_AdditionPrioritaireParenthese, com=  $a+b(Q) \rightarrow (a+b)Q$ ; a et b rationnels, Q quelconque

ER\_ProduitnFacteurX\_Donne\_nX, com= confusion produit et somme

**ER\_GroupementAdditif**, com= erreurs de groupement additifs

ER\_DifferenceMonomesIdDonneX, com=  $ax-ax \rightarrow x$

ER\_DifferenceMonomesIdDonneMoinsX, com=  $ax-ax \rightarrow -x$

ER\_DifferenceMonomesIdDegreNDonneX^N, com=  $ax^n-ax^n \rightarrow x^n$

ER\_2NegatifsIdDonne-1, com=  $-a-a \rightarrow -1$

ER\_Pertex\_Red, com=  $ax^2-ax \rightarrow ax-a$

ER\_Pertex\_Dans\_x^2, com=  $ax^2 \rightarrow a^2$

**GroupementMultiplicatif**, com= Groupement multiplicatif, Ex:  $x^2*x^3 \rightarrow x^5$

**ER\_xx\_vaut\_x\_Red**, com= Groupement multiplicatif errone de monomes de degre 2

ER\_PerteCarre\_Produit2facteurs, com=  $(nx)*(px) \rightarrow (n*p)x$

ER\_PerteCarre\_Produit4facteurs, com=  $nx \cdot px \rightarrow (n \cdot p)x$

ER\_PerteCarre\_Somme, com= Perte du carre dans une somme, ex:  $7x^2 + 2x^2 = 9x$

ER\_Pertex\_Produit3facteurs, com=  $nx \cdot p \rightarrow n \cdot p$

**ER\_Puissance**, com= erreur sur l'utilisation des puissances

ER\_pa^n\_Donne\_pna, com= convention notation  $a^n$  incomprise

ER\_a^n\_Donne\_na, com= convention notation  $a^n$  incomprise

ER\_Positifx^n\_Donne\_Positif^nx, com= puissance de x porte sur le coefficient, son signe étant conserve

ER\_Negatifx^n\_Donne\_Negatif^nx, com= puissance de x porte sur le coefficient negatif

ER\_a^n^p, com=  $(a^n)^p \rightarrow a^{(n \cdot p)}$

ER\_a^2p, com=  $(-a)^n \rightarrow -a^n$ , n pair

ER\_a^2p+1, com=  $(-a)^n \rightarrow a^n$ , n impair

**Annexe 7a**  
**Comparaison des règles implantées dans Anais avec celles proposées par Paris VIII**

**Règles sur les puissances**

	<i>Paris</i>	<i>Grenoble</i>
P1	<b><math>ax(bx)=abx</math></b> ; a, b entiers + ou - : 64 utilisations pour 30 élèves	<b>ER_Perte_carre_Produit2facteurs</b> <b>ER_Perte_carre_Produit4facteurs</b> <b>ER_PerteCarre_Dvt</b> <b>ER_PerteCarre_Dvt2</b>
Exemples	$3x*2x = 6x$ $(4x)(3x) = 12x$ $7x(3x+5)=21x+7x*5$ $(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x-15x$	Contexte plus précis.
P2	<b><math>ax^2+bx=(a+b)x</math></b> ; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves	<b>ER_degré1_plus_degre2_donne_degre1</b>
Exemples	$5x^2+3x-7-3x^2+2x+8 = 8x-3x^2+2x+1$	
P3	<b><math>ax^2=a^2x</math></b> ; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves	<b>ER_Positifx^n_Donne_Positif^nx</b> <b>ER_Negatifx^n_Donne_Negatif^nx</b>
Exemples	$-3x^2 = -9x$ $-3x^2 = 9x$	
P4	<b><math>x+x=x^2</math></b> ; 2 utilisations pour 2 élèves	<b>ER_SommeDegreMonomeCoeffIdentique</b> <b>ER_a+b_Donne_ab</b>
Exemples	$5x+5x = 5x^2$ $x+x = x*x = x^2$	Plus général : $ax+ax = ax^2$ ou $ax+bx = abx^2$
P5	<b><math>ax^2+bx^2=(a+b)x^4</math></b> 1 utilisation pour 1 élève	<b>ER_DegréhPlusDegrek_donne_DegrehPlusk</b>
Exemples	$10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=16x-9x^4$	Plus général : $ax^h+bx^k = (a+b)x^{h+k}$
P6	<b><math>ax^2+ax=ax^3</math></b> ; a entier + ou - 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_SommeDegreMonomeCoeffIdentique</b>
Exemples	$10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=10x-6x^3-3x^2$	Plus général : $ax^h+ax^k = ax^{h+k}$
P9	<b><math>ax^2+bx=(a+b)x^2</math></b> ; a,b entier + ou - 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_degré1_plus_degre2_donne_degre2</b>
Exemples	$6x^2+5x=11x^2$	
P10	<b><math>ax^2+b=(a+b)x^2</math></b> ; a, b entiers + ou - 1 utilisation pour 1 élève	<b>ER_constantes_plus_variable_donne_variable</b>
Exemples	$10x-3=7x$	Plus général : $ax^h+b = (a+b)x^h$

Règles propres à Grenoble :

P11		<b>ER_constante_plus_variable_donne_constant</b>
Exemples	$10x-3=7$	$ax^h+b = a+b$
P12		<b>ER_SommeDegreMonome</b>
Exemples	$10x-6x^2-3x^2+6x=7x$	Tous les x sont comptés dans l'expression de départ et les coefficients additionnés
P13		<b>ER_a^n_Donne_na</b>
Exemples		$x^n = 3x$
P14		<b>ER_Perte_Carre_Somme</b>
Exemples		$ax^2+bx^2 = (a+b)x$
P15		<b>ER_Pertex_Red</b>
Exemples		$ax^2-ax \rightarrow ax-a$
P16		<b>ER_Pertex_Dans_x^2</b>
Exemples		$ax^2 \rightarrow a^2$
P17		<b>ER_DifferenceMonomesIdDonneX</b>
Exemples		$ax-ax \rightarrow x$
P18		<b>ER_DifferenceMonomesIdDonneMoinsX</b>
Exemples		$ax-ax \rightarrow -x$
P19		<b>ER_DifferenceMonomesIdDegreNDonneX^N</b>
Exemples		$ax^n-ax^n \rightarrow x^n$
P20		<b>ER_2NegatifsIdDonne-1</b>
Exemples		$-a-a \rightarrow -1$
P21		<b>ER_a^n^p</b>
Exemples		$(a^n)^p \rightarrow a^{(n+p)}$
P22		<b>ER_a^2p+1</b>
Exemples		$(-a)^n \rightarrow a^n, n \text{ impair}$
P23		<b>ER_a^2p</b>
Exemples		$(-a)^n \rightarrow -a^n, n \text{ pair}$

**Il existe aussi 12 règles de Grenoble dites erreurs faibles de perte d'argument, de signe etc.**

Règles propres à Paris :

P24	<b><math>ax+bx^3=(a+b)x</math> ; a, b entiers + ou -</b> 1 utilisation pour 1 élève	
Exemples	$10x-3x^3=7x$	
P25	<b><math>ax^3+bx^2=(a+b)x^3</math> ; a, b entiers + ou -</b> 1 utilisation pour 1 élève	
Exemples	$10x-6x^3-3x^2=10x-3x^3$	

Annexe 7b

**Règles de priorité des opérations**

	<i>Paris</i>	<i>Grenoble</i>
O1	<b><math>-(ax+b)=-ax+b</math></b> a, b entiers + ou - : 36 utilisations pour 22 élèves.	<b>ER_Moins_Fois_1erDeSomme</b> <b>ER_SupprParenthesesBrute</b>
Exemples	$7x+(2x-8)-(-3x+12)=9x-x+10x+19x$ $-9*(-2)-7*(-6+2)=18-42+14$	
O2	<b><math>a-bc=(a-b)c</math></b> ; a, b entiers +, c entier + ou facteur de x ou facteur entre parenthèses : 28 utilisations pour 19 élèves.	<b>ER_SoustractionPrioritaireParentheses</b>
Exemples	$2-3(-5x-5) = -1(-5x-5)$	Plus restrictive : c doit être entre parenthèses
O3	<b><math>a+bc=(a+b)c</math></b> ; a, b entiers +, c facteur de x : 4 utilisations pour 3 élèves.	<b>ER_AdditionPrioritaireParentheses</b>
		c doit être entre parenthèses
O4	<b><math>(ax+b)(cx+d)=ax+bcx+d</math></b> ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_SupprParenthesesBrute</b>
		Plus général

Règles propres à Grenoble :

O5	<b>ER_SoustractionPrioritaire</b>
	$ab-b = a$

Règles propres à Paris :

Pour beaucoup de règles qui suivent, elles apparaîtront, pour Grenoble dans les règles de factorisation (des signes) :

2. O6  **$a-b-c=a-(b+c)$**  ; a, b, c entiers + : 14 utilisations pour 14 élèves.

Fran 30 :  $7-5*5-2=7-25-2=7-23=-16$  p

1. O7  **$a+(b+c)-(d+e)=a+(b+c-d+e)$**  ; a, b, c, d, e entiers + ou – ou facteurs de x + ou -

Dodi 4 :  $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+2x-8+3x+12=12x+14$  p

3. O8  **$a-bc=a*(-bc)$**  ; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

4. O9  **$a-b+c=a-(b+c)$**  ; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

5. O10  **$abc+de=ab+cde$**  ; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

1. O11  **$ax(-bx)=ax-bx$**  ; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

2. O12  **$(ax-b)-(-cx+d)=(ax-b)(-(-cx+d))$**  ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

Annexe 7c

**22 Règles de distribution**

	<i>Paris</i>	<i>Grenoble</i>
D1	<b><math>(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd</math> ;</b> a, b,c,d entiers + ou - : 53 utilisations pour 41 élèves.	<b>GEN_somme_fois_somme</b>
Exemple	$(-3-6)*(6-8)=-18+24-36+48$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
D2	<b><math>(a+bx)(cx+d)=acx+ad+bcx^2+bd</math> ;</b> a, b, c, d entiers + ou - : 6 utilisations pour 6 élèves.	<b>ER_Pertex_Dvt</b> <b>ER_Pertex_Dvt2</b>
Exemple	$(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x^2-15$	a peut être nul
D5	<b><math>(ax+b)-(cx+d)=(ax-cx)+(ax-d)+(b-cx)+(b-d)</math> ;</b> a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_somme_moins_somme</b> <b>ER_terme_moins_somme</b>
Exemple		
D6	<b><math>a+(bx+c)+(dx+e)=(a+bx)+(a+c)+(dx+e)</math> ;</b> a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_terme_plus_somme</b>
Exemple		Plus général : fonctionne pour a entier ou monôme $a + (bx+c) = (a+bx)+(a+c)$

Règles propres à Grenoble :

D7		<b>ER_somme_plus_somme</b>
Exemple		$(a+b)+(c+d) = (a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)$
D8		<b>ER_a_Fois1erDeSomme</b> <b>ER_moins_a_Fois1erDeSomme</b> <b>ER_SuppressionbrutedeParenthese</b>
Exemple		$a(b+c) = ab+c$
D9		<b>ER_a_Fois2ndDeSomme</b> <b>ER_moins_a_Fois2ndDeSomme</b>
Exemple		$a(b+c) = b+ac$
D10		<b>ER_Pertex_Dans_x^2Dvt</b> <b>ER_Pertex_Dans_x^2Dvt2</b>
Exemple	$7x(3x+5) = 21^2+35x$ $(2x+1)(3x+5) = 6^2+10x+3x+5$	$(ax+b)(cx+d) = (ac)^2+adx+bcx+bd$ b peut être nul

D7		<b>ER_somme_plus_somme</b>
Exemple		$(a+b)+(c+d) = (a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)$
D11		<b>ER_PerteCarre_Dvt</b> <b>ER_PerteCarre_Dvt2</b>
Exemple	$7x(3x+5) = 21x+35x$ $(2x+1)(3x+5) = 6x+10x+3x+5$	$(ax+b)(cx+d) = acx+adx+bcx+bd$ b peut être nul

Règles propres à Paris :

3. D12  $ax-(b+cx)-(dx+e)=-ax(b+cx)-(dx+e)$  ; a, b, c, d, e entiers + ou - : 5 utilisations pour 5 élèves.
4. D13  $ax+(bx-c)-(-dx+e)=ax+bx-ax-c+dx-e$  ; a, b, c, d, e entiers + ou - : 3 utilisations pour 2 élèves.
5. D14  $ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax-(-b)+cx-ax+cx+ax+d$  ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.
6. D15  $ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax+b+ax-cx+cx-d$  ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.
7. D16  $(ax+b)(cx+d)=acx^2+adx+bcx+(b+d)$  ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
8. D17  $(ax+b)(cx+d)=(acx^2)(bd)$  ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
9. D18  $ax(b+cx)=axb*acx^2$  ; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 1 élève.
- 10.D19  $a(bx+c)=a+bc+ac$  ; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
- 11.D20  $(ax+b)(cx+d)=acx+adx+b-cd+bd$  ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.
- 12.D21  $ax+(bx+c)+(dx+e)=(ax+bx)+(ax+c)+(ax+dx)+(ax+e)$  ; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
- 13.D22  $(ax+b)(cx+d)=(acx+ad)(bcx+bd)$  ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
- 14.D23  $(ax+b)+(cx+d)=(ax+b)(cx+d)$  ; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
- 15.D24  $ax+(bx+c)=abx^2+acx$  ; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
- 16.D25  $(1+bx)(cx-d)=cx-bcx^2-bdx$  ; a=1, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

Annexe 7d

**Règles sur les signes**

	<i>Paris</i>	<i>Grenoble</i>
S1	$-(a+bx)-(bx+c)=-a-bx+bx-c=-a-c$ ; a, b,c,d entiers + ou - : 5 utilisations pour 5 élèves.	<b>ER_2TermesNegatifsDonneNul</b> <b>ER_2TermesNegatifsDonneNul_DansSomme</b> <b>ER_2TermesPositifsDonneNul_DansSomme</b>
Exemple	$9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x-4-5x+5x-10$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
S2	$-(-a+bx)-(bx+c)=a-c$ a, b, c entiers + : 3 utilisations pour 3 élèves.	<b>ER_2TermesNegatifsDonneNul</b> <b>ER_2TermesNegatifsDonneNul_DansSomme</b> <b>ER_2TermesPositifsDonneNul_DansSomme</b>
Exemple	$9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x+4+5x-5x+10$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
S3	$-a(-b+c)=-ab+ac$ ; $-a(-bx-b)=abx-ab$ ; a, b, c entiers + : 2 utilisation pour 2 élèves	<b>ER_Moins_Fois2ndDeSomme</b> <b>ER_Moins_Fois1erDeSomme</b> <b>ER_Moins_Fois2ndSomme_Coefficient</b> <b>ER_Moins_Fois1erSomme_Coefficient</b>
S4	$ax(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx)-(cx+d)$ $(ax-b)-(-cx+d)=ax-b-cx+d$ ; a, b, c, d entiers + : 2 utilisation pour 2 élèves.	<b>ER_Moins_FoisAucunDeSomme</b>
		Plus général : $-(a+b) = a+b$
S5	$ax(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx-cx+d)$ ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.	<b>ER_Moins_FoisAucunDeSomme combiné avec</b> <b>ER_Moins_Fois1erDeSomme</b>

Règles propres à Grenoble :

S6		<b>ER_Moins_FoisNbNegatifsDeSomme</b> <b>(resp. ER_Moins_FoisNbPositifsDeSomme)</b>
		Le moins devant une parenthèse n'est distribué que sur les nombres négatifs (respectivement positifs)
S7		<b>ER_OubliSigneMoins</b>
	$7x-x = 8x$	$a-b = a+b$
S8		<b>ER_AjoutSigneMoins</b>
	$-5x+2x = -7x$	$-a+b = -a-b$
S9		<b>ER_InversionSigneSomme</b> <b>ER_InversionSigneResultat</b>
	$7x-x+3x = -9x$	$a+b = -a-b$

Règles propres à Paris :

2. S10  $-a(-b)=-ab$  ; a, b entiers + , pour les exercices 4, 7, b facteur de x: 22 utilisations pour 16 élèves.

Ches 2 :  $(-3-6)*(6-8)=-9*(-2)=-18$

Ches 5 :  $(-2)*(-5)*3+(-2)*(-4)=30+(-8)=22$

Pomm 17 :  $-9*(-2)-7*(-6+2)=-18-42-14=-74$

3. S11  $a(-b)=a-b$  ; a, b entiers + : 7 utilisations pour 6 élèves.

Weng 4 :  $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+2x-8-3x-12=6x-20$

4. S12  $a(-b)=ab$  ; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

17.S13  $(ax+b)-(-cx+d)=-ax-b-cx-d$  ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

18.S14  $(-a-b)(c-d)=-ac+ad+bd+bc$  ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

### Annexe 8

**Liste des énoncés d'exercices de l'expérimentation vue de valider des théorèmes-en-acte sur les notions de puissances, parenthèses et signe moins.**

N°	Développer ou/et réduire les expressions suivantes
1.	$-3x^2 + 7x^2 - 4(2-x+x^2)$
2.	$5x^2 + (-3x)^2 + 2x(-2-3x)$
3.	$(1+5x) - (4+3x)$
4.	$-2x + 3 - 2x + (6x)^2$
5.	$(-2x)^3 + 6(x)^2 - 2(3+2x)^2 + (-x)^3$
6.	$[4(-2-x)]^2 - 3^2x + (2-x)(4+5x)$
7.	$-3^2x - (x^2+3-x) + x^*(-2)^2 - 6 + x$
8.	$7 + (2+x) + 4x - x + x^4$
9.	$x - 7 + x + (-3)^*(2x) - (6x)^2$
10.	$(-4)^{2*x} - 6^*(-x) + (1+x) + (x-2+x^2)$
11.	$4x + 4x^3 + 5(3+2x) - (3x)^2 - 7*3$
12.	$(-2)^3x + (7x)(2x) - (1+x) + (4+3x)$
13.	$-x^3 - (3+x)^2 + 2(-x) + 3x$
14.	$x(-2)^2 + x^2 - (3+x-x^2)$
15.	$(-x)^2 - 3^2 - x*x + 2(-x)^3$
16.	$2 + (x-y+3) - (6+x-y) + 3y$
17.	$(-yx)^2 + x^*(-2)^2$
18.	$(-4x)^2 - 7(-x+y) - 4(x)^2$
19.	$3x - 4x^2 + 3x^2 - 2x$
20.	$-3(2+x-x^2) + 7x - 6 - 7x$