



HAL
open science

Rapport de fin de projet de l'ACI: Ecole et Sciences Cognitives - Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique

Mirta Gordon, Gilles Bisson, David Renaudie, Walter Olivera, Julien Gobeill, Nathalie Bénard, Sandra Michelet, Vivien Robinet, Frédéric Pellegrino, Emmanuel Sander, et al.

► To cite this version:

Mirta Gordon, Gilles Bisson, David Renaudie, Walter Olivera, Julien Gobeill, et al.. Rapport de fin de projet de l'ACI: Ecole et Sciences Cognitives - Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique. 2005. hal-00086836

HAL Id: hal-00086836

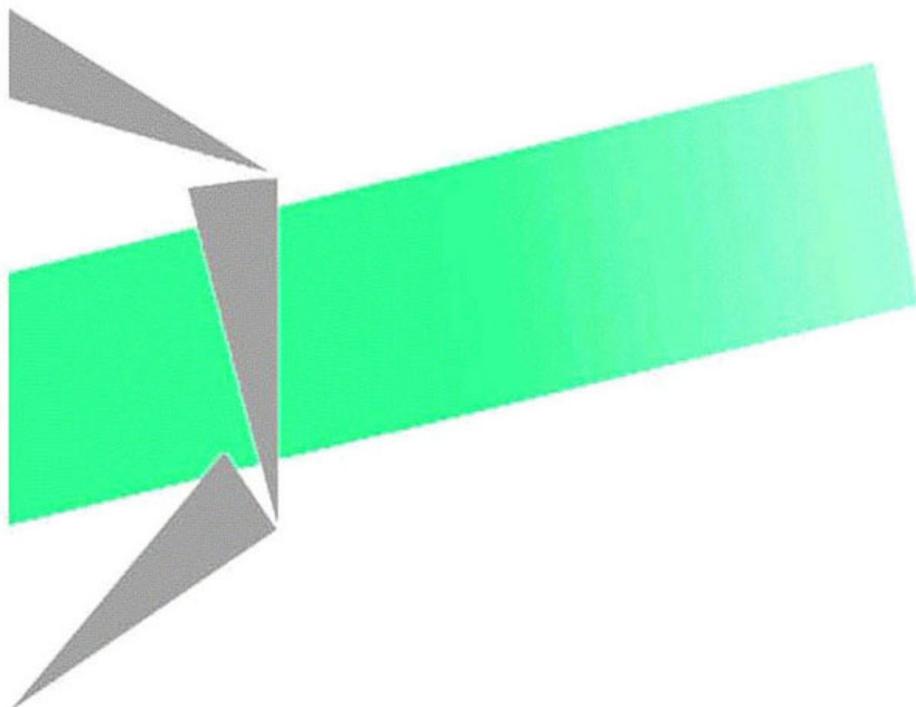
<https://telearn.hal.science/hal-00086836>

Preprint submitted on 21 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les cahiers Leibniz



Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et
construction de stratégies d'enseignement dans un
contexte technologique

Rapport de fin de projet de l'ACI

ECOLE ET SCIENCES COGNITIVES

Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av. Félix Viallet, 38000 GRENOBLE, France -
ISSN : 1298-020X

n° 123
Mai 2005

Site internet : <http://www-leibniz.imag.fr>

Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique

Rapport de fin de projet de l'ACI ECOLE ET SCIENCES COGNITIVES

Participants

Laboratoire Leibniz, Equipe Did@Tic, Grenoble

Jean-François Nicaud (responsable du projet)

Nicolas Balacheff

Denis Bouhineau

Hamid Chaachoua

Thomas Huguet

Marie-Caroline Crozet

Romain Fernandez

Laboratoire Leibniz, Equipe Apprentissage, Grenoble

Mirta Gordon

Gilles Bisson

David Renaudie

Walter Olivera

Julien Gobeill

Nathalie Bénard

Sandra Michelet

Vivien Robinet

Frédéric Pellegrino

Equipe Cognition et activités finalisées, Université de Paris 8

Emmanuel Sander

Stéphanie Tapol

Lab. interdisciplinaire de recherche en didactique éducation et formation, IUFM Montpellier

Alain Bronner

Oumar Dème

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brésil

Marilena Bittar

Table des matières

1	INTRODUCTION	5
2	PROGRAMME DES ACTIONS ENGAGEES	5
2.1	Les actions engagées	5
2.2	Modalités concrètes de travail interdisciplinaire	8
2.3	Les acteurs du projet	9
3	APPORTS ET RESULTATS SCIENTIFIQUES	11
3.1	Introduction	11
3.2	Les exercices d'algèbre	15
3.2.1	Les exercices, la dénotation et les solutions	15
3.2.2	Le mécanisme d'inférence fondamental du calcul algébrique	17
3.2.3	Autres mécanismes du calcul algébrique	17
3.2.4	Les stratégies de résolution des exercices	18
3.3	Les expérimentations	19
3.3.1	Description du logiciel APLUSIX	19
3.3.2	EXP92	21
3.3.3	EXP-Paris	22
3.3.4	EXP93	22
3.3.5	EXP-Annemasse	23
3.3.6	EXP-Brésil	23
3.3.7	Tableau synoptique des expérimentations	24
3.4	Le diagnostic local manuel avec des règles correctes et erronées	24
3.4.1	Problématique	24
3.4.2	Les données et l'outil de visualisation	27
3.4.3	Production de règles par analyse des comportements des élèves d'EXP-Paris	28
3.5	Un diagnostic local automatique avec des règles correctes et erronées	32
3.5.1	Problématique	32
3.5.2	Les règles sur les équations et inéquations linéaires pour le diagnostic automatique	33
3.5.3	L'algorithme de diagnostic	35
3.5.4	Un exemple de diagnostic	39
3.5.5	Les résultats de l'algorithme de diagnostic sur les actions sur les équations et inéquations	40
3.5.6	Les résultats de l'algorithme de diagnostic sur les développements et les réductions	41
3.6	Un treillis de conceptions a priori pour les mouvements dans les équations et inéquations	42
3.6.1	Problématique	42
3.6.2	Les conceptions produites	43
3.6.3	Le diagnostic global avec des conceptions a priori	55
3.7	La production de conceptions par classification automatique	61
3.7.1	Problématique	61
3.7.2	Approche par classification	62
3.7.3	L'approche par modélisation symbolique	70
3.8	Elaboration de stratégies didactiques et réalisation d'un tuteur artificiel	79
3.8.1	Problématique	79
3.8.2	Spécifications de stratégies d'enseignement	81

3.8.3	Exemples de stratégies d'enseignement	86
3.8.4	Réalisations de Tuteurs artificiels	95
3.9	Conclusion et perspectives	102
3.10	Références	105
4	ANNEXES	109
4.1	ANNEXE 1 : règles de l'analyste provenant de l'étude de trois classes de troisième d'EXP-Paris	110
4.2	ANNEXE 2 : liste des exercices pour les trois classes de quatrième d'EXP-Paris, avec détail des contraintes choisies	123
4.3	ANNEXE 3 : Utilisation des règles élève par élève	125
4.4	ANNEXE 4 : Stabilité des règles des règles élève par élève	127
4.5	ANNEXE 5 : comparaison des règles produites par les deux analystes	129
4.6	ANNEXE 6 : tableau des conceptions diagnostiquées pour l'ensemble des 3186 élèves	135

1 Introduction

Le projet porte sur l'apprentissage de l'algèbre dans un contexte technologique. Le contexte est apporté par le logiciel APLUSIX, un micromonde algébrique, réalisé par l'équipe Did@TIC, avec lequel l'élève développe les calculs de son choix, comme dans le contexte papier-crayon, grâce à un éditeur avancé d'expressions algébriques et de raisonnements. En mode « exercice », le logiciel apporte les rétroactions fondamentales : il indique à l'élève si les calculs sont corrects ou non, si les exercices sont bien terminés ou non. En mode « test », le logiciel n'apporte pas de rétroaction, permettant d'évaluer des travaux d'élèves effectués sans aide. Le logiciel APLUSIX enregistre les protocoles sous la forme de fichiers contenant les actions des élèves, ce qui permet de rejouer, de façon détaillée, les activités des élèves (avec un « magnétoscope logiciel ») pour les étudier « manuellement », ce qui permet aussi d'appliquer des processus informatiques pour étudier « automatiquement » ces protocoles.

Le premier objectif du projet est de recueillir une quantité importante de protocoles, en particulier dans le mode « test », pour étudier en différé les comportements des élèves.

Le deuxième objectif est d'étudier ces protocoles pour produire des connaissances sur les élèves et construire des modèles d'élèves. Il s'agit de déterminer quelles règles, correctes ou erronées, sont appliquées par un élève à un moment donné et de rechercher des régularités dans son comportement, régularités exprimées sous la forme de conceptions. Les conceptions recherchées sont prototypiques parce qu'elles apparaissent chez plusieurs élèves ou qu'elles prennent place dans un modèle cohérent. Les résultats du deuxième objectif se composent d'un ensemble de règles servant à modéliser les élèves et de cartes de conceptions, ainsi que des fréquences d'apparition des règles et des conceptions sur des groupes d'élèves. Le deuxième objectif comporte aussi la production de représentations d'élèves par apprentissage automatique.

Le troisième objectif est de réguler l'apprentissage de l'algèbre, en construisant des stratégies d'enseignement s'appuyant sur les conceptions produites. Il s'agit de construire des activités permettant de faire évoluer les conceptions d'un élève ou d'un groupe d'élèves, en particulier pour corriger les dysfonctionnements. Cet objectif contient la réalisation d'un tuteur artificiel, fonctionnant sur le micromonde APLUSIX, et mettant en œuvre certaines stratégies d'enseignement.

2 Programme des actions engagées

2.1 Les actions engagées

Le travail a commencé en juin 2002 par le choix des conditions expérimentales pour la première expérimentation. Il a été décidé d'utiliser une grande partie du domaine du logiciel (calculs numériques, développements, factorisations, résolutions d'équations et d'inéquations) avec plusieurs classes de 3^e, 2nd, 1^{re} de collèges et de lycées français, en utilisant principalement des séances de travaux pratiques sous la responsabilité de l'enseignant de mathématique de ces classes. Cette expérimentation a commencé en septembre 2002, pilotée par les groupes de Grenoble et de

Montpellier, et s'est appelée EXP92. Elle s'est déroulée jusqu'en décembre 2002 et a produit des protocoles dès octobre 2002.

A partir de septembre 2002, un logiciel, nommé ANAÏS, a été développé pour produire des statistiques sur les protocoles recueillis et compléter ces protocoles. Les statistiques ont un double objectif : nous renseigner sur le contenu des protocoles et apporter un retour aux enseignants qui avaient conduit les expérimentations avec leurs élèves. Ces statistiques s'appliquent à une population pouvant comporter plusieurs classes et indiquent, par élève, par classe, par type d'exercice et par exercice, le nombre d'exercices abordés, le nombre d'exercices correctement résolus et le nombre d'erreurs de calcul. La complétion des protocoles a pour objectif d'enrichir les informations sur les expressions algébriques produites par les élèves, afin d'alimenter ensuite des logiciels de classification automatique. En effet, le logiciel ANAÏS s'appuyant sur le moteur du logiciel APLUSIX, peut effectuer des calculs de propriétés mathématiques sur les expressions, ce que ne peuvent pas faire les logiciels de classification automatique qui n'ont pas de connaissance d'algèbre. Les informations produites portent sur l'équivalence entre les étapes de calculs et sur les règles correctes (de la base de connaissances d'APLUSIX) applicables à l'expression courante.

En octobre 2002, quand les premiers protocoles furent reçus, le travail d'étude manuelle (à l'aide du magnétoscope d'APLUSIX) des travaux des élèves, pour rechercher les règles correctes ou erronées qui sont appliquées, a commencé. Ce travail a été conduit par les didacticiens et les psychologues du projet qui ont produit, dans un premier temps des règles sur papier.

Fin 2002, lorsque les protocoles reçus furent assez nombreux, les premiers travaux de classification automatique ont été réalisés. Ils ont produit des clusters regroupant les élèves sur des critères généraux, non dépourvus d'intérêt, mais très éloignés de conceptions. Il est apparu, à ce moment, qu'il nous fallait plus de données : d'une part, les expérimentations passées ayant eu lieu sur des durées fixes, certains exercices n'étaient traités que par une faible partie des élèves ; d'autre part, la diversité des types d'exercice abordés a réduit le nombre de calculs effectués dans les mêmes situations.

Fin 2002 et début 2003, une expérimentation a été conduite par le groupe de Paris 8, en utilisant les mêmes fichiers d'exercices, avec plusieurs classes de 4^e et 3^e, mais en laissant le temps à chaque élève de traiter tous les exercices de la liste.

Un enrichissement plus fort des protocoles a été réalisé en mars 2003 en ajoutant la qualification des transformations des élèves que l'on trouve dans la thèse de Gélis (Gélis 1994). L'impact sur la production de clusters par classification automatique n'a pas été significatif.

De janvier à juin 2003, le travail de modélisation des calculs des élèves par des règles s'est poursuivi. Une partie importante des règles sur papier ont été codées dans le langage SIM¹, pour pouvoir les appliquer automatiquement, et un algorithme de diagnostic automatique des transformations d'élèves a été réalisé et intégré au logiciel ANAÏS. Basé sur un mécanisme de recherche heuristique, cet algorithme explique la transformation d'une expression A en une expression B, transformation produite par un élève, par une suite d'applications de règles correctes ou erronées de la base de règles construite. Des résultats intéressants ont commencé à être produits, sous la forme d'un bon taux de succès de l'algorithme de diagnostic, pendant qu'un problème d'explosion de la base de règles et de choix de la granularité des règles apparaissait.

En septembre 2003, un point a été effectué sur la progression des travaux, révélant un retard par rapport aux objectifs et des difficultés à embrasser l'ensemble du domaine de l'algèbre initialement envisagé. Il a été décidé de se focaliser sur les équations et inéquations du premier degré et de conduire une nouvelle campagne de recueil de protocoles portant uniquement sur ce type d'exercice.

¹ SIM (Système d'Inférence et de MétaInférences) langage de règles de réécriture et de règles de production d'Applusix.

Cette nouvelle expérimentation, appelée EXP93, a été lancée dans les mêmes conditions qu'EXP92, sauf pour ce qui concerne les exercices proposés.

A la fin de l'année 2003, les nouveaux protocoles ont pu être étudiés. La base de règles a été enrichie. Les diagnostics produits par ANAÏS ont été ajoutés aux protocoles avant classification automatique. Les essais de classification automatique ont été assez décevants, produisant des clusters proches de règles et non de conceptions.

Il nous est apparu clairement, à ce moment, que l'algèbre est un domaine dans lequel les objets sont très structurés et qu'il est difficile d'y appliquer des mécanismes généraux : en fournissant peu d'informations complémentaires, nous n'obtenions rien de significatif ; en fournissant des informations complémentaires riches, nous obtenions une organisation simple de ces informations. La question était d'obtenir des conceptions en algèbre qui ne soient pas simplement des règles et qui traduisent la régularité du comportement des élèves. Nous avons interprété cette régularité de comportement par des théorèmes-en-acte au sens de Vergnaud (1991). Ils expriment une généralisation d'une ou plusieurs règles sur plusieurs types de situations, que nous définissons par un contexte. Ces théorèmes sont souvent implicites chez l'élève et peuvent même être faux. Ils ont presque tous un domaine de validité non vide où ils produisent des réponses correctes. La détermination de ces théorèmes-en-acte est primordiale pour la détermination des conceptions. Nous avons décidé donc de centrer notre projet sur le diagnostic automatique des théorèmes-en-acte.

Au début de l'année 2004, nous avons décidé : (1) d'associer des traits aux règles pour que ces règles soient manipulées moins directement par les processus automatiques ; (2) de suivre deux pistes pour la production de conceptions, l'une consistant à produire un ensemble de conceptions a priori et à mettre en œuvre un mécanisme automatique d'affectation de ces conceptions aux élèves, l'autre à produire des conceptions directement à partir des données enrichies, par apprentissage automatique, en utilisant une méthode symbolique ; (3) de commencer la construction de stratégies d'enseignement, sans attendre les premières conceptions, ainsi que la réflexion sur le tuteurs artificiel.

L'année 2004 a vu aussi le démarrage d'un projet bilatéral France-Brésil du programme CAPES-COFECUB entre l'équipe Did@TIC et une équipe de l'Université de Campo Grande. Ce projet a pour objectif d'étudier les apports à l'apprentissage de l'algèbre du logiciel APLUSIX ainsi que de modéliser les élèves avec des conceptions. Une expérimentation d'APLUSIX de grande ampleur, EXP-Brésil, a été effectuée sur 2500 élèves des établissements scolaires gérés par la ville de Campo Grande, avec deux protocoles : le premier visant à étudier l'apprentissage effectué avec une petite séance d'APLUSIX en mode « exercice » ; le second visant à produire un maximum d'informations pour le calcul de conceptions, en plaçant principalement les élèves en mode « test ».

La restructuration de nos modèles nous a conduits à nous focaliser sur le concept de mouvement dans les équations et inéquations, à en dégager trois composants : l'évolution du signe de l'argument du mouvement, l'évolution du sens de l'inégalité pour les inéquations et l'évolution de l'opérateur reliant l'argument du mouvement à l'équation ou l'inéquation. Cela a conduit à dégager des traits des règles de mouvement pertinents par rapport à ces composants du concept de mouvement. Nous avons implanté dans ANAÏS le calcul de ces traits.

Cette définition de composants du concept mouvement et de traits associés aux mouvements a permis de débiter la construction de conceptions a priori et des mécanismes d'attribution de ces conceptions. Ces conceptions ont été organisées dans un treillis et traduites dans le langage SIM. Les mécanismes d'attribution ont été implantés dans le logiciel ANAÏS. Ainsi, des conceptions a priori ont pu être attribuées automatiquement par le logiciel ANAÏS à partir des protocoles enregistrés.

Parallèlement, une méthode symbolique d'apprentissage automatique, s'appuyant sur la nouvelle représentation des règles de mouvement, a construit des conceptions qu'elle a attribuées à des élèves et a exhibé des comportements irréguliers chez certains élèves.

Le travail de spécification de stratégies d'enseignement a été effectué en 2004. Il s'est appuyé sur des expériences effectuées en classe auparavant. La construction de modèle de tuteurs artificiels à quatre niveaux et la réalisation d'une maquette de tuteur artificiel se sont aussi déroulées pendant l'année 2004.

Le programme de travail n'a pas subi de réorientation. Il a eu des tâtonnements provenant du fait que la voie n'était pas tracée à l'avance. Il était trop ambitieux pour être conduit in extenso dans le temps imparti ; nous avons ainsi été conduits à lui apporter deux limitations : une focalisation sur une partie du domaine pour la construction de conceptions et la production d'une maquette de tuteur artificiel au lieu d'un prototype. Tous les acteurs du projet poursuivent le travail après la fin officielle de l'ACI.

2.2 Modalités concrètes de travail interdisciplinaire

Le travail a été organisé avec des réunions régulières des membres du projet, à raison d'une par mois la première année et d'une tous les deux mois la seconde. Ces réunions ont permis des présentations d'idées, des descriptions de travaux, des discussions sur des objectifs ainsi que des résultats et des mises en place détaillées des orientations à suivre.

Les différentes actions ont été conduites en sous-groupes souvent pluridisciplinaires.

Conduite des expérimentations et recueil des protocoles

Le choix du protocole expérimental a été effectué de façon collégiale, le but principal étant de recueillir de bons protocoles pour la modélisation des élèves, un but auxiliaire étant d'avoir un contexte intéressant pour les élèves et l'enseignant. La mise en œuvre s'est effectuée, sauf dans un cas, en utilisant les enseignants des classes concernées. Le pilotage de chaque sous-groupe a été effectué par un membre du projet, didacticien ou psychologue.

Construction des règles

La construction des règles semi-formelles a été effectuée par les didacticiens et les psychologues par l'étude de fichiers fournissant les étapes des élèves et l'observation au magnétoscope logiciel, quand nécessaire, du détail de leur comportement. Le codage des règles a été majoritairement effectué par les informaticiens. Des interactions ont eu lieu pour rationaliser le travail et obtenir un modèle cohérent. Il s'agissait en particulier d'éviter les règles très spécifiques et de compléter le modèle par des règles non observées mais naturellement imaginées par le chercheur parce qu'analogues à des règles observées.

Réalisation de l'algorithme de diagnostic

La conception et la mise en œuvre de l'algorithme de diagnostic ont été effectuées par les informaticiens. L'algorithme a été testé par les informaticiens, didacticiens et psychologues pour effectuer sa mise au point (choix de la formule de calcul de la distance entre les expressions et du coût associé aux règles).

Evolution du modèle général

L'évolution consistant à passer de règles à des traits sur les règles associés à des composants d'un concept cible est le résultat de discussions entre tous. Elles ont eu lieu, en particulier, lors des réunions générales.

Production de clusters

Cette production a été effectuée par les informaticiens. Il y a eu une interaction régulière entre le groupe développant ANAïs, complétant les protocoles, et le groupe produisant les clusters. Il y a aussi une interaction régulière entre le groupe produisant les clusters et les didacticiens, pour l'interprétation des résultats.

Construction des conceptions a priori

Cette construction a été effectuée en interaction permanente entre informaticiens et didacticiens. Il s'agissait de produire des conceptions calculables à partir du concept général de conception apporté par le groupe des didacticiens. Il y a eu un va et vient entre des constructions abstraites très proches du concept de conception et des constructions computationnelles plus éloignées jusqu'à ce que la jonction soit faite sur des objets satisfaisants.

Construction de conceptions par apprentissage

Ce travail a donné lieu à des échanges importants entre informaticiens et didacticiens afin que les premiers cernent bien le type de construction à produire, dans un premier temps, pour étudier les résultats produits, dans un second temps.

Elaboration de stratégies d'enseignement et réalisation d'un tuteur artificiel

Ce travail a été conduit en interaction permanente entre didacticiens et informaticien pour situer les actions dans un cadre général et les mettre en œuvre de façon opérationnelle dans le système à base de connaissance SIM.

2.3 Les acteurs du projet

Cette section donne la liste des acteurs du projet et des parties du projet sur lesquelles ils ont travaillé principalement. A l'exception des stagiaires, chacun a aussi travaillé de façon moins importante sur d'autres parties.

Laboratoire Leibniz, Grenoble, équipe Did@TIC

Jean-François Nicaud, responsable du projet, professeur d'informatique, université Joseph Fourier.

- Représentation des règles
- Réalisation du logiciel ANAïs
- Algorithme de diagnostic local avec des règles
- Représentation des conceptions a priori
- Algorithme d'assignation des conceptions a priori

Nicolas Balacheff, directeur de recherche en didactique des mathématiques, laboratoire Leibniz
Cadre théorique

Denis Bouhineau, maître de conférences en informatique, université Joseph Fourier
Tuteur artificiel

Hamid Chaachoua, maître de conférences en didactique des mathématiques, IUFM de Grenoble
Conduite d'expérimentations
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles
Construction et représentation des conceptions a priori

Thomas Huguet, doctorant en didactique des mathématiques, université Joseph Fourier
Conduite d'expérimentations
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles

Marie-Caroline Crozet, stagiaire de Master 2, université Joseph Fourier
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles et représentation des règles

Romain Fernandez, stagiaire de Master 2, université Joseph Fourier
Tuteur artificiel

Laboratoire Leibniz, Grenoble, équipe Apprentissage

Mirta Gordon, Directeur de recherches, CNRS
Détermination de clusters par apprentissage
Construction de conceptions par apprentissage

Gilles Bisson, Chargé de recherches, CNRS
Détermination de clusters par apprentissage
Construction de conceptions par apprentissage

David Renaudie, doctorant en informatique, université Joseph Fourier
Détermination de clusters par apprentissage
Construction de conceptions par apprentissage

Walter Olivera, DEA de Sciences Cognitives, Grenoble Université
Bibliographie sur le modèle de l'élève

Julien Gobeill, DEA de Sciences Cognitives, Grenoble Université
Détermination de clusters par apprentissage

Nathalie Bénard et Sandra Michelet, Master 2 MIASS (en binôme), université Pierre Mendès-France
Analyse des données expérimentales des élèves en interaction avec APLUSIX

Vivien Robinet, stage d'ingénieur INSA de Toulouse
Modélisation d'élèves par apprentissage

Frédéric Pellegrino, stage d'ingénieur CNAM
Base de données des protocoles
Site Web du projet

Equipe Cognition et activités finalisées, université de Paris 8

Emmanuel Sander, maître de conférences en psychologie, université de Paris 8
Conduite d'expérimentations
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles
Etude de la fréquence et de la prédictibilité des règles

Stéphanie Tapol, stage de Master 2 en psychologie, université de Paris 8
Conduite d'expérimentations
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles
Etude de la fréquence et de la prédictibilité des règles

Laboratoire interdisciplinaire de recherche en didactique éducation et formation, IUFM de Montpellier

Alain Bronner, maître de conférences en didactique des mathématiques, IUFM de Montpellier
Conduite d'expérimentations
Stratégies d'enseignement
Tuteur artificiel

Oumar Dème, stage de Master 2 en didactique des sciences, université de Montpellier 2
Stratégies d'enseignement

Marilena Bittar, maître de conférences en didactique des maths, UFMS, Campo Grande, Brésil
Conduite d'expérimentations
Construction de règles à partir de l'étude de protocoles
Construction de conceptions a priori

3 Apports et résultats scientifiques

3.1 Introduction

Le travail effectué dans ce projet porte sur l'algèbre élémentaire et se situe dans un modèle qui est présenté en 3.2. Ce modèle est un modèle expert, tant au niveau de la représentation des expressions algébriques que de l'utilisation de règles de réécriture. Les expressions algébriques y sont vues comme des opérateurs (+ - × / etc.) appliqués à des expressions, donc comme des arbres. Ce sont des formes syntaxiques associées à une sémantique. Les règles de réécriture sont des identités orientées.

On peut se demander si un tel modèle est pertinent pour représenter des élèves en train d'apprendre le domaine, si les comportements de certains élèves ne devraient pas plutôt s'inscrire dans des modèles naïfs. Ainsi, Sleeman (1982, 1984) a-t-il fait le choix d'un modèle général naïf au niveau des expressions algébriques, les considérant comme des chaînes de caractères.

Nos raisons et justifications *a priori* sont les suivantes :

- Nous nous intéressons à l'algèbre élémentaire, celle qui est enseignée dans l'enseignement secondaire et non à une algèbre rudimentaire, correspondant aux tous premiers apprentissages ; ce domaine, bien que qualifié habituellement d'« élémentaire » est d'une grande complexité et n'est pas étudiable dans des modèles généraux naïfs ;
- Le fait de se baser sur un modèle général expert n'empêche pas de représenter des mécanismes naïfs ; ainsi, le non respect de la priorité des opérateurs, conduisant à calculer dans $2-2 \times 3$ la soustraction avant la multiplication peut-il être représenté par une règle de réécriture s'appliquant à la représentation experte des expressions.
- Nous considérons les comportements très naïfs ne pouvant pas être représentés par le modèle expert que nous utilisons comme étant en dehors du champ de nos recherches.

Nos travaux montrent *a posteriori* une bonne adéquation de ce modèle pour les élèves que nous avons cherché à modéliser, de la classe de 4^e à la classe de 2nd.

Les expérimentations que nous avons conduites pour recueillir des données sont décrites en 3.3. Elles se sont déroulées en France, à l'exception d'une expérimentation massive, portant sur 2500 élèves, qui s'est déroulée au Brésil.

Les parties 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 présentent les travaux de modélisation manuelle et automatique. Ils s'organisent d'une façon qui est décrite dans la figure 1.

La partie 3.8 présente les travaux de spécification de stratégies pédagogiques et de construction de tuteurs artificiels.

La partie 3.9 apporte une conclusion et des perspectives.

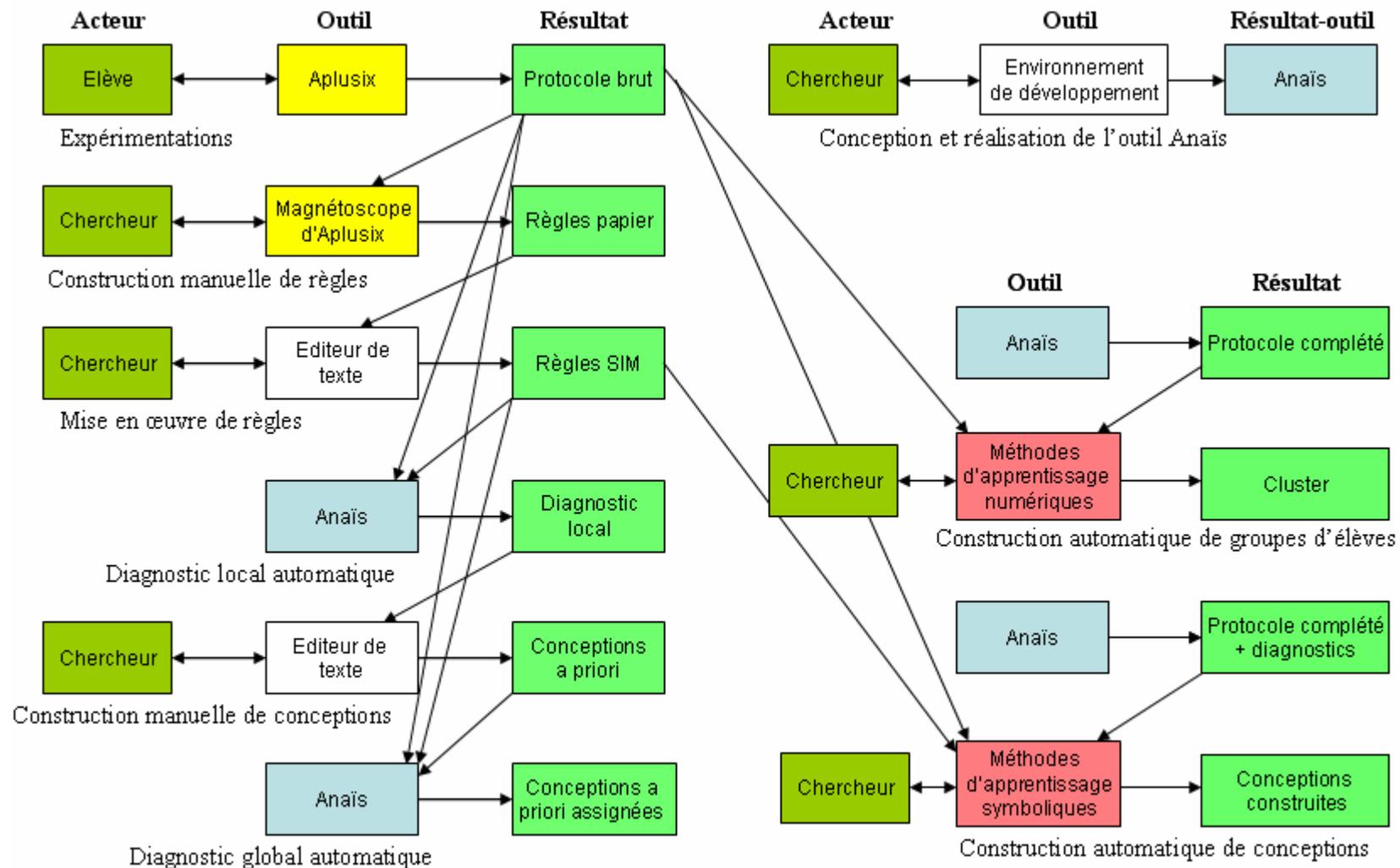


Figure 1.
Les différentes étapes et productions du projet

3.2 Les exercices d'algèbre

L'espace d'exercices que nous considérons est celui des *exercices formels classiques d'algèbre* de l'enseignement du second degré (classes équivalentes aux classes de 4^e, 3^e, 2nd françaises). Ils sont composés d'un type d'exercice et d'une expression, comme « Factoriser $(x-3)(x+2)-(6-2x)(3x-1)$ » ou « Résoudre $4(x+3)=3x+1$ ». Les expressions sont des expressions polynomiales ou rationnelles (quotients d'expressions polynomiales), ou des équations ou inéquations polynomiales ou rationnelles. Les types d'exercice classiques sont : *développer et réduire* une expression polynomiale, *factoriser* une expression polynomiale, *simplifier* une expression rationnelle, *résoudre* une équation ou inéquation polynomiale ou rationnelle. Dans le cadre du projet, nous nous sommes focalisés sur les équations et inéquations du premier degré. Le travail sera poursuivi sur les autres parties de l'espace d'exercices. L'aspect *formel* des exercices provient des propriétés des mécanismes de résolution qui sont décrits plus loin.

Pour décrire les objets et mécanismes du calcul algébrique, nous utilisons le cadre de la théorie des réécritures (Dershowitz and Jouannaud, 1989) en utilisant toutefois une terminologie plus proche de l'enseignement secondaire. Nous effectuons donc une description épistémique dans cette partie.

3.2.1 Les exercices, la dénotation et les solutions

Les objets manipulés dans les exercices formels d'algèbre sont des expressions algébriques. Ces expressions sont des objets syntaxiques qui sont des variables, des formes numériques ou des opérateurs ($+ - \times / \wedge = \neq < \leq > \geq$ et ou) appliqués à des expressions (Gélis 1994, Nicaud et al. 2001), les opérateurs devant être compris comme des constructeurs d'expressions (l'application de $+$ à 2 et 3 produit l'expression $2+3$, et non 5, en langue naturelle « la somme de 2 et de 3 » et non le résultat du calcul de cette somme). Dans ce cadre, le terme expression a une signification large qui contient aussi bien des formes polynomiales et rationnelles que des équations (syntaxiquement, une équation est une application de l'opérateur $=$ à deux expressions). Lorsque nous aurons besoin de faire une distinction, nous parlerons d'expressions fonctionnelles (comme $4x^2-5x+8$) et d'expressions relationnelles (comme $4(x+3) \leq 3x+1$). La représentation des expressions la plus proche de leur définition est la représentation en arbre, cf. figure 2. La représentation habituelle, avec des successions de caractères, des traits de fraction et des exposants, est une représentation moins proche, donc plus complexe. Elle a évidemment des qualités importantes puisqu'elle est la forme universellement utilisée.

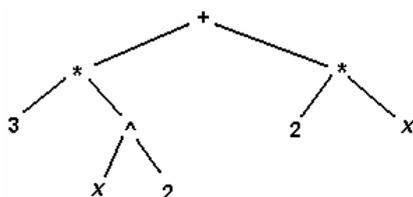


Figure 2. Représentation en arbre de « la somme entre, d'une part, le produit de 3 et la puissance de x avec l'exposant 2 et, d'autre part, le produit de 2 et de x » dont la représentation habituelle est $3x^2+2x$.

Les expressions algébriques ont une sémantique fondamentale, appelée dénotation (Arzarello et al. 2001, Drouhard 1992, Gélis 1994, Nicaud et al. 2001) qui définit l'équivalence entre deux expressions algébriques (deux expressions algébriques sont équivalentes si et seulement si elles ont même dénotation) et qui définit le raisonnement par équivalence comme étant un raisonnement qui conserve la dénotation. Le système de dénotation que nous considérons² est constitué des fonctions

² Il existe des variantes de systèmes de dénotation. Pour les expressions polynomiales, on peut prendre les fonctions polynomiales ou les polynômes ; on sait que ces deux systèmes de dénotation sont équivalents lorsque l'ensemble des coefficients est infini. Pour les expressions rationnelles, on peut prendre les fonctions rationnelles ou les fractions rationnelles ; ces deux systèmes de dénotation ne sont équivalents, leur différence provient du fait que les fonctions rationnelles ont un ensemble de définition alors que les fractions rationnelles

numériques pour les expressions fonctionnelles (ainsi l'expression $x(x+2)$ a pour dénotation la fonction $x \mapsto x^2+2x$ et l'expression x^2+x+x a la même dénotation) et des ensembles numériques pour les expressions relationnelles (ainsi l'équation $x(x+2) = 0$ a pour dénotation l'ensemble $\{-2; 0\}$, son ensemble de solutions, et l'équation $x^2 = -x-x$ a la même dénotation). Si les deux expressions $x(x+2)$ et x^2+2x ont même dénotation, les élèves ont des difficultés pour substituer la deuxième par la première pour résoudre l'équation $x^2+2x = 0$ (Arzarello 1993, Grugeon 1995). La manipulation des expressions algébriques dépend de l'interprétation que l'élève fera de l'expression appelée connotation (Drouhard 1992). La connotation est une interprétation subjective qui dépend de l'expérience personnelle de l'élève.

Résoudre un exercice d'algèbre formel consiste à trouver une solution S et à prouver que S est une solution de l'exercice³.

Les formes des solutions sont des formes liées au type d'exercice. La définition d'un type d'exercice nécessite la définition de son « prédicat de solutions » (Nicaud 1987), prédicat définissant les expressions qui sont solutions. Par exemple, le prédicat de solutions du type d'exercices « factoriser », pour les expressions polynomiales d'une variable sur les nombres réels, peut-être défini comme : toute composition à l'aide des opérateurs $-$ et \wedge d'expressions de la forme « a », « ax+b » ou « ax^2+bx+c » avec $b^2-4ac < 0$, dans laquelle a, b c sont des formes réduites de nombres⁴. Le prédicat de solutions est un élément du contrat didactique (Brousseau 1986) qui n'est pas toujours clairement explicité et qui peut évoluer d'un niveau de classe à un autre⁵.

Prouver qu'une expression S vérifiant le prédicat de solution est une solution d'un exercice portant sur une expression E consiste à prouver que S a la même dénotation que E ou que S est une autre forme de représentation de la dénotation de E (cas des équations lorsque l'on demande des ensembles de solutions). Ainsi :

$(x+2)^2$ est une solution « factoriser x^2+4x+4 ».

$(x+2)^2$ est une forme résolue, mais n'est pas solution de « factoriser x^2+2x », car n'est pas équivalente à x^2+2x .

$x = 2$ est une solution de « résoudre $2x+2 = 6$ » lorsque l'on demande les solutions sous la forme d'égalités.

L'ensemble $\{2\}$ est une solution de « résoudre $2x+2 = 6$ » lorsque l'on demande les solutions sous la forme d'un ensemble de solutions ; ici, on est dans le cas d'une autre forme de représentation de la dénotation.

Le principal mécanisme de résolution des exercices formels d'algèbre est le raisonnement par équivalence. Il consiste à chercher une solution de l'exercice en remplaçant l'expression de l'énoncé par des expressions équivalentes jusqu'à ce qu'une forme résolue soit obtenue. L'importance de ce mode de raisonnement provient de sa capacité à résoudre de nombreux exercices d'algèbre et du fait qu'il prouve le résultat, lorsque les calculs sont corrects. Il existe d'autres modes formels de raisonnement, comme le raisonnement par conditions nécessaires, le raisonnement par conditions suffisantes, le raisonnement par récurrence. Le raisonnement par conditions nécessaires (ou par implication) s'applique bien à la résolution des équations et inéquations ; il a l'inconvénient de ne pas prouver la solution, de produire un sur-ensemble de l'ensemble des solutions.

n'en ont pas. Les polynômes et les fractions rationnelles n'étant pas connus dans l'enseignement secondaire, le système de dénotation que nous avons indiqué s'impose.

³ Le terme adéquat est « une solution » même si le terme usuel est « la solution ». En effet, une solution est une expression et, généralement, plusieurs expressions sont acceptées ; ainsi $(x-2)(x+3)$ est une solution de « factoriser x^2+x-6 » ; $(x+3)(x-2)$ en est une autre.

⁴ Il peut être complété par la demande de mise en facteur des nombres, se traduisant par « dans $ax+b$, lorsque a et b sont entiers, ils ne doivent pas avoir de diviseur commun », analogue pour ax^2+bx+c .

⁵ Le premier prédicat de solution utilisé pour « factoriser » consiste généralement à fournir un produit, par exemple à transformer $3x+6$ en $3(x+2)$ ou $2x^2+3x$ en $x(2x+3)$. Mais il évolue pour que la forme factorisée de x^2+4x+4 ne soit pas $(x+2)(x+2)$ mais $(x+2)^2$ et que $2(x^2-1)$ ne soit pas accepté comme solution.

3.2.2 Le mécanisme d'inférence fondamental du calcul algébrique

Une importante partie du calcul algébrique s'appuie sur des identités, qui sont des égalités universellement quantifiées. Certaines identités sont simples, comme : $A+0 = A$, d'autres sont plus complexes, comme $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$. L'utilisation de ces identités peut se faire dans un sens ou dans l'autre, fonction du but poursuivi, par exemple, pour la seconde, en remplaçant A^2-B^2 par $(A-B)(A+B)$ ou en remplaçant $(A-B)(A+B)$ par A^2-B^2 . Ainsi, l'opérateur de raisonnement qui est utilisé est orienté, c'est une *règle de réécriture* (Dershowitz and Jouannaud, 1989), chaque identité donnant naissance à deux règles de réécriture. Ainsi, l'identité $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$ donne naissance à la règle $A^2-B^2 \rightarrow (A-B)(A+B)$, qui est une règle de factorisation, et à la règle $(A-B)(A+B) \rightarrow A^2-B^2$ qui est une règle de développement.

Le mécanisme d'inférence qui utilise les règles de réécriture se décompose ainsi :

- 1) Unification : on détermine des règles applicables,
- 2) Stratégie : on choisit une règle applicable parmi celles obtenues en 1)
- 3) Application : on applique la règle choisie en 2)

L'unification d'une règle $G \rightarrow D$ à une expression E consiste à trouver une sous-expression $E1$ de E et une substitution S entre les variables de G et des expressions, telles que le remplacement des variables de D par les expressions associées produise $E1$. Par exemple, la règle $A^2-B^2 \rightarrow (A-B)(A+B)$ est applicable à la sous-expression $4x^2-1$ de l'expression $(2x-1)(x+3)+4x^2-1$ avec la substitution $[A : 2x ; B : 1]$. L'unification est une opération complexe. Dans l'exemple, l'unification n'est pas directe, ni entre A^2 et $4x^2$ (elle demande des calculs auxiliaires : mettre $4x^2$ sous la forme $(2x)^2$), ni entre B^2 et 1 (elle demande de mettre 1 sous la forme 1^2).

La stratégie du point 2) est une stratégie locale qui consiste à choisir l'une des règles applicables qui ont été obtenues. Il y a aussi une stratégie générale qui est décrite dans la partie suivante.

L'application est appelée *remplacement d'égaux* (Dershowitz and Jouannaud, 1989) ; elle consiste à appliquer la substitution au membre droit de la règle et à remplacer l'expression $E1$ par cette expression. Dans l'exemple précédent, l'application de la substitution $[A : 2x ; B : 1]$ au membre droit $(A-B)(A+B)$ produit $(2x-1)(2x+1)$ et le remplacement de $4x^2-1$ par cette expression dans $(2x-1)(x+3)+4x^2-1$ produit $(2x-1)(x+3)+(2x-1)(2x+1)$. L'application d'une règle est parfois combinée avec l'application de règles de réduction, par exemple, l'application de la règle $A(B+C) \rightarrow AB+AC$ à $2(4x+5)$ produit $2 \times 4x + 2 \times 5$; elle est généralement combinée à des calculs numériques pour produire directement $8x+10$.

3.2.3 Autres mécanismes du calcul algébrique

Il existe des mécanismes qui ne s'appuient pas sur des règles de réécriture et qui permettent de produire une expression équivalente à une expression de départ, expression qui est solution de l'exercice ou permet de s'approcher d'une solution.

Les formules de factorisation des expressions polynomiales constituent une première famille de tels mécanismes. Ces formules s'appliquent à des expressions polynomiales développées et réduites ; elles fournissent les racines des polynômes et permettent ainsi de produire une forme factorisée de l'expression. C'est le cas des formules du discriminant pour les expressions de degré 2, des formules de Cardan pour les expressions de degré 3, et des formules de Ferrari pour les expressions de degré 4. Seule le discriminant est enseignée dans l'enseignement du second degré.

Un autre mécanisme, qui ne s'appuie pas sur des règles de réécriture, est celui qui consiste à deviner la forme factorisée d'une expression polynomiale (ce mécanisme est enseigné dans certains pays, comme les Etats-Unis et le Japon, et ignoré dans d'autres pays, dont la France). Pour une

expression telle que x^2-5x+6 , il consiste à deviner que le résultat est $(x-3)(x-2)$ et à vérifier que la forme développée réduite de cette expression est bien l'expression de départ. Dans le cas habituel où les coefficients sont entiers, un théorème de divisibilité aide à trouver les coefficients de la forme factorisée⁶.

3.2.4 Les stratégies de résolution des exercices

Cas des exercices portant sur des expressions fonctionnelles

Les types d'exercice concernés sont : *développer et réduire* une expression polynomiale, *factoriser* une expression polynomiale, *simplifier* une expression rationnelle.

Les règles sur les expressions fonctionnelles peuvent être classées (Gélis 1994) en règles de réduction, règle de développement, règles de factorisation et règles à faible signification stratégique (dont l'application sert à préparer l'application d'une règle stratégiquement plus significative). Ainsi :

- la règle d'addition des monômes de même degré, $ax^n+bx^n \rightarrow (a \oplus b)x^n$, a et b étant des nombres, \oplus étant la somme calculée, est une règle de réduction,
- la règle de distribution, $A(B+C) \rightarrow AB+AC$, est une règle de développement quand A n'est pas un nombre et une règle à faible signification stratégique quand A est un nombre,
- la règle inverse de la règle de distribution, $AB+AC \rightarrow A(B+C)$, est une règle de factorisation quand A n'est pas un nombre et une règle à faible signification stratégique quand A est un nombre.

Les règles de réduction ont la propriété de terminaison : étant donné une expression E , on ne peut appliquer successivement qu'une suite finie de ces règles. La réunion des règles de réduction et des règles de développement a la propriété de terminaison ; il en va de même pour la réunion des règles de réduction et des règles de factorisation (Gélis 1994).

La stratégie générale pour *développer et réduire* une expression polynomiale, consiste à appliquer les règles de développement et de réduction jusqu'à terminaison.

La stratégie générale pour *factoriser* une expression polynomiale, est plus complexe. Si l'on applique les règles de factorisation et de réduction jusqu'à terminaison, on peut ne pas obtenir une forme résolue. Le premier cas provient d'une situation où l'on a plusieurs factorisations partielles possibles et où une seule conduit à une solution : si l'on n'a pas choisi la bonne voie, on arrive à la terminaison sans avoir une solution. Ce cas peut se traiter par un retour en arrière pour essayer les autres règles de factorisation. Le second cas est celui d'une situation où aucune voie utilisant les factorisations possibles n'aboutit à une forme résolue. Ce cas peut se traiter, pour les expressions du second degré, par un développement et l'utilisation de la formule du discriminant lorsqu'elle est connue. Hors de cette situation, on a affaire à un exercice très difficile (que l'on ne rencontre pas dans l'enseignement du second degré).

La stratégie générale pour *simplifier* une expression rationnelle, quotient de deux expressions polynomiales P et Q , consiste à factoriser P et Q pour trouver leurs facteurs communs puis à simplifier la fraction à l'aide de ces facteurs communs.

Cas des exercices portant sur des expressions relationnelles

La stratégie générale pour *résoudre* une équation ou inéquation à une inconnue du premier degré consiste à développer les deux membres, à obtenir une expression de la forme $ax \sim b$ dans laquelle a et b sont des nombres et \sim un symbole de relation ($= \neq < \leq > \geq$). Cette forme s'obtient à l'aide

⁶ Ce théorème indique que si ax^2+bx+c , les coefficients étant entiers, est équivalent à $(px+q)(rx+s)$, il l'est en particulier avec une expression dans laquelle les coefficients sont entiers, p et r étant des diviseurs de a ; q et s étant des diviseurs de c . La technique de recherche des diviseurs qui en découle est enseignée dans certains pays.

d'additions d'expressions aux deux membres ou de mouvements additifs. Ensuite, une forme $x \sim c$ est obtenue à l'aide de multiplications ou divisions des deux membres par des nombres, ou encore de mouvements multiplicatifs. Selon le contrat didactique, la forme $x \sim c$ est la réponse attendue ou la formulation de l'ensemble des solutions est attendue.

La stratégie générale pour résoudre une équation ou inéquation à une inconnue de degré supérieur à un consiste à la mettre sous la forme $A \sim 0$ à l'aide de mouvements additifs, puis à factoriser A. Dans le cas d'une équation, on poursuit en la décomposant en équations de degré un à l'aide de la règle $AB = 0 \rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ et on applique les mécanismes des équations de degré un. Dans le cas d'une inéquation, on poursuit en produisant un tableau de signe duquel on tire l'ensemble des solutions.

3.3 Les expérimentations

3.3.1 Description du logiciel APLUSIX

3.3.1.1 Le logiciel

APLUSIX est un logiciel d'aide à l'apprentissage de l'algèbre pour les élèves de collèges et de lycées. Il porte sur la résolution d'exercices (calculs numériques, développements, factorisations, résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations) ainsi que sur la résolution de problèmes donnés en langue naturel et conduisant à une expression numérique ou algébrique.

APLUSIX comporte un mode appelé « Exercice » qui permet un entraînement de l'élève à la résolution d'exercices, cf. figure 3. Dans ce mode l'élève résout les exercices en produisant ses propres calculs. Un éditeur performant d'expressions algébriques rend très faciles la saisie et la modification des expressions. APLUSIX aide l'élève à augmenter ses compétences en algèbre en lui fournissant trois sortes de rétroactions : (1) il indique à tout moment si les calculs sont justes ou faux, cf. figure 3 ; (2) il fournit la solution à la demande ; (3) il indique si l'exercice est bien terminé quand l'élève l'affirme cf. figure 4.

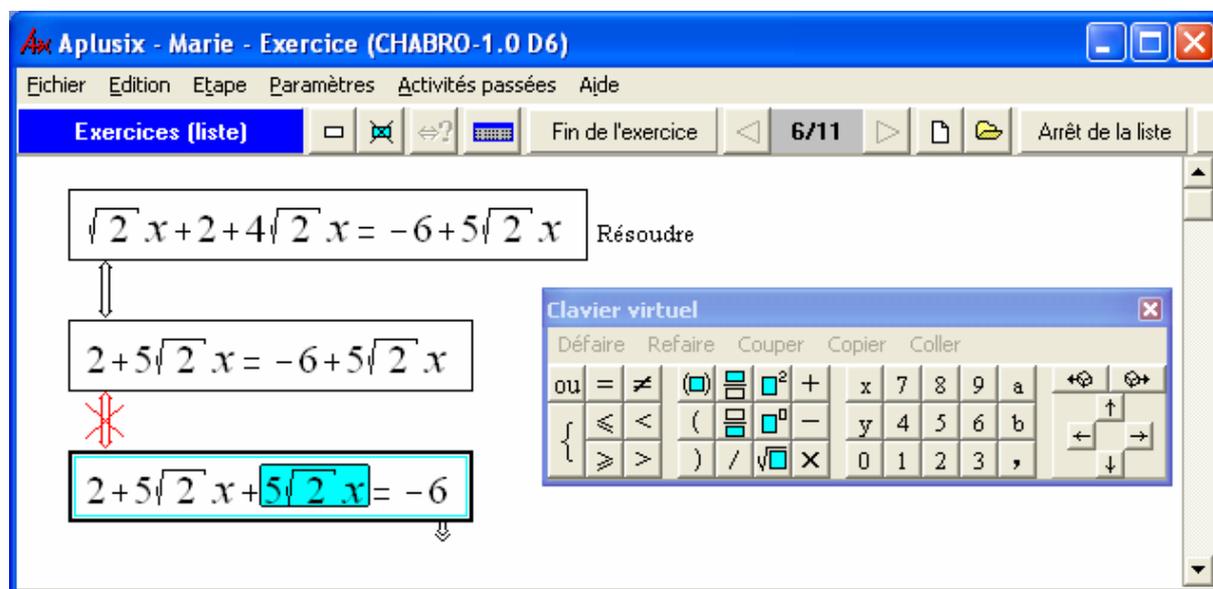


Figure 3. Exemple d'utilisation en mode « exercice ». Le premier calcul est juste. L'élève a ensuite effectué un glisser-déposer d'une expression d'un membre dans l'autre sans changer de signe, APLUSIX lui indique que ce calcul est erroné.

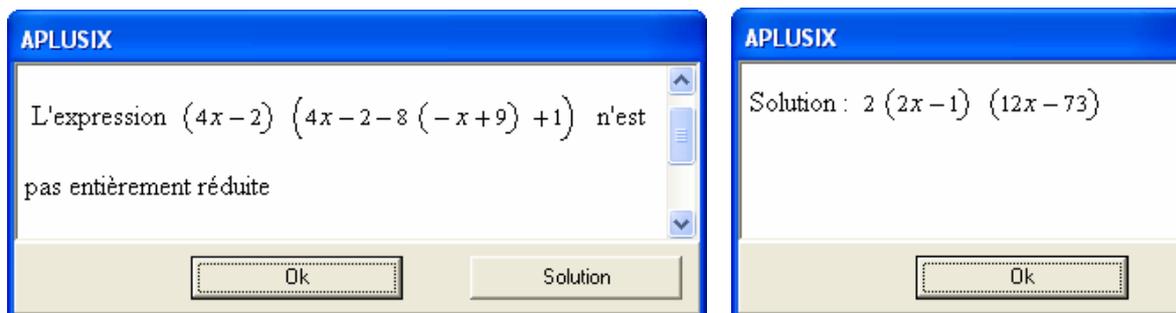


Figure 4. Exemple de rétroactions lorsque l'élève indique qu'il a terminé sa résolution. L'exercice est ici une factorisation. Le calcul de l'élève est correct mais l'expression finale n'est pas réduite. L'élève peut demander à voir la solution si le professeur a choisi cette fonctionnalité.

Le logiciel comporte une importante base d'exercices organisée par thèmes et difficultés. Ce sont des exercices prêts à l'emploi dont les coefficients sont tirés au sort. Il comporte aussi un éditeur d'exercices permettant au professeur de faire ses propres fichiers d'exercices. Il permet aussi de travailler avec des exercices pris dans des livres dont l'élève recopie les énoncés.

APLUSIX comporte un mode appelé « Test » dans lequel il laisse travailler l'élève pendant 30 minutes sans lui apporter d'information, cf. figure 5. A l'issue d'un test, l'élève obtient un score et peut passer en « Autocorrection », mode dans lequel il revoit son travail, avec les indications de calculs justes et de calculs faux, d'exercice terminé ou non. Il peut alors reprendre les exercices pour les corriger lui-même, avec l'aide des rétroactions du mode « Exercice ».

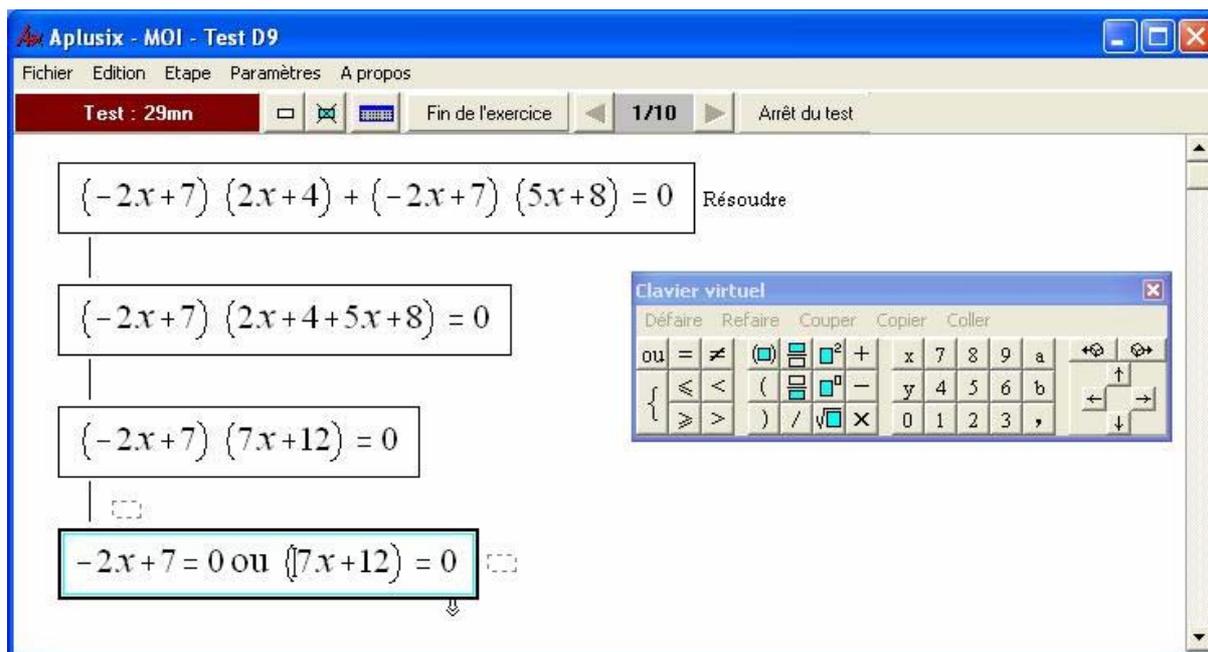


Figure 5. Exemple de d'utilisation en mode « test ».

Le logiciel enregistre toutes les actions l'élève. Cela permet une observation fine des activités passées à l'aide d'un « magnétoscope logiciel », observation qui peut être effectuée par l'élève ou le professeur. Le professeur a accès aussi à des statistiques sur ses classes en termes de nombre d'exercices traités ou bien résolus, de calculs erronés, de score.

APLUSIX fonctionne sur le réseau local de l'établissement. Un logiciel d'administration permet de gérer (créer, modifier, détruire) les classes, les professeurs et les élèves. Les mises à jour se font sans avoir à recréer les classes, les professeurs et les élèves. APLUSIX peut aussi s'installer sur des ordinateurs autonomes, en particulier à la maison.

APLUSIX comporte des commandes (Calculer, Développer, Factoriser, Résoudre) permettant de faire faire certains calculs à l'ordinateur ainsi que des paramètres permettant de limiter les actions que les élèves d'une classe peuvent effectuer (en particulier permettant de désactiver ou de limiter les commandes de calcul).

3.3.1.2 Domaine

Le domaine d'APLUSIX est présenté dans le tableau 1. Les nombres sont composés des entiers, des décimaux, des fractions et des radicaux. Les nombres décimaux ont été implantés en cours de projet, ils n'étaient pas présents dans les premières expérimentations.

Type de problème	Domaine pour la vérification des calculs.	Domaine pour le calcul des solutions et des scores.
Calcul numérique	Les expressions doivent comporter uniquement des nombres.	Les expressions doivent comporter uniquement des nombres.
Développement	Expressions polynomiales ou rationnelles	Expressions polynomiales.
Factorisation	Expressions polynomiales.	Expressions polynomiales de degré formel inférieur ou égal à 2.
Résolution d'équations	Equations polynomiales de degré formel inférieur ou égal à 4 et équations rationnelles s'y ramenant.	Equations polynomiales de degré formel inférieur ou égal à 2.
Résolution d'inéquations	Inéquations polynomiales de degré formel inférieur ou égal à 4 et inéquations rationnelles s'y ramenant.	Equations polynomiales de degré formel inférieur ou égal à 1.
Résolution de systèmes	Systèmes linéaires ayant au plus 10 équations et 10 inconnues.	Systèmes linéaires ayant 2 équations et 2 inconnues.

Tableau 1. Le domaine d'APLUSIX.

3.3.1.3 Evaluation, valorisation

APLUSIX est utilisé depuis 2002, de façon régulière ou épisodique, dans des établissements scolaires en France et à l'étranger.

Des expérimentations ont montré des résultats significatifs. Au lycée de Seyssinet, en France, avec une classe de 28 élèves, une phase d'exercices de 50 minutes, encadrée d'un pré-test et d'un post-test, a produit une augmentation de 100% du taux d'exercices isomorphes correctement résolus. Dans la ville de Campo Grande, au Brésil, avec 1120 élèves, une phase d'exercices de 30 minutes, encadrée d'un pré-test et d'un post-test, a produit une augmentation de 30% du taux d'exercices correctement résolus. Voir le détail de ces expérimentations à l'adresse : <http://aplusix.imag.fr>

L'avis des enseignants qui ont longuement utilisé APLUSIX est très positif, voir <http://aplusix.imag.fr>

APLUSIX est en cours de valorisation. Il est actuellement traduit en anglais, portugais, espagnol, italien, vietnamien et japonais.

3.3.2 EXP92

La première expérimentation conduite dans le cadre de ce projet s'est déroulée en septembre 2002 et s'est intitulée EXP92. Elle était destinée aux classes de 3^e, 2nd, 1^{re} de collèges et lycées français.

Nous avons eu comme objectif de recueillir des données caractérisant l'état de connaissances des élèves en début d'année. Un fichier d'exercices a été élaboré pour chacune des trois situations (classe de 3^e, 2nd, 1^{re}), couvrant la quasi-totalité du champ de problèmes de l'algèbre élémentaire de la classe : factorisation, réduction, développement, résolution des équations du premier et second degré, résolution des inéquations du premier degré, résolution des systèmes d'équations du premier degré,

mais aussi des exercices de calculs numériques sur les fractions et les radicaux. La progression choisie a consisté à changer de type d'exercice à chaque fois pour minimiser l'apprentissage. Par exemple, le fichier pour la première situation de la classe de 2nd comportait 30 exercices : 3 « calculer » portant sur des expressions numériques ; 8 « développer et réduire » portant sur des polynômes de degré 2 ; 6 « factoriser » portant sur des polynômes de degré 2 ; 10 « résoudre » portant sur des équations polynomiales (4 de degré 1, 6 de degré 2) et enfin, 3 « résoudre » portant l'un sur une équation rationnelle, l'autre sur une inéquation de degré 1 et le dernier sur un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Les nombres étaient majoritairement des nombres entiers, des fractions numériques apparaissant toutefois dans cinq exercices et des radicaux dans un exercice.

Les élèves ont travaillé en salle informatique, de façon individuelle, en étant encadrés par leur professeur de mathématique. Les exercices étaient les mêmes pour tous les élèves, fournis automatiquement par le logiciel. Une version spéciale du logiciel APLUSIX a été utilisée pour restreindre l'ensemble des commandes et des feedbacks. Trois situations, d'une trentaine d'exercices, ont été préparées, chacune pour une séance d'une heure environ. Ces situations différentes par le mode de vérification des calculs que le logiciel effectue et par les exercices proposés. La troisième situation était facultative⁷. L'expérimentation s'est déroulée sur un mois dans 5 classes de troisième (123 élèves), dans 6 classes seconde (194 élèves) et deux classes de première (47 élèves). Les enseignants participant à l'expérimentation avaient pour consignes de ne pas apporter d'aide mathématique aux élèves.

Les protocoles d'EXP92 ont permis de débiter les travaux d'analyse manuelle et de classification automatique.

3.3.3 EXP-Paris

Deux expérimentations ont été conduites en novembre 2002 et février 2003 dans des classes de 4^e et de 3^e d'un collège privé parisien. Les motivations pour ces deux expérimentations étaient d'avoir une passation plus encadrée et de permettre aux élèves de résoudre tous les exercices. La passation a été organisée par les chercheurs, avec de petits groupes de 8 à 10 élèves dans la salle d'informatique, chacun travaillant seul sur un ordinateur. Une première séance d'une heure a permis à certains élèves de résoudre tous les exercices et une deuxième séance a été fournie aux autres élèves, ce qui a permis de récolter des protocoles pour l'ensemble des exercices.

L'expérimentation de novembre 2002 a porté sur 3 classes de 3^e (72 élèves). Les exercices utilisés étaient ceux d'EXP92.

L'expérimentation de février 2003 a porté sur 3 classes de 4^e (90 élèves). Les exercices utilisés étaient spécifiques. Ils sont décrits en 3.4.3.2.

Les protocoles d'EXP-Paris ont fait l'objet d'une analyse manuelle fine conduisant à la construction de règles et à l'étude de leur taux d'utilisation et de leur taux de prédictibilité.

3.3.4 EXP93

Les protocoles de l'EXP92 nous ont permis la construction de règles erronées. En revanche, nous n'avons pas pu construire des conceptions du fait de la multiplicité des tâches et aussi du fait que les élèves n'ont pas traité tous les exercices. En effet, la détermination des conceptions repose sur un diagnostic de règles observées chez l'élève un certain nombre de fois et sur un ensemble d'exercices de même type. Pour cela, des nous avons monté une nouvelle expérimentation, EXP93, en restreignant le domaine de l'algèbre à un type d'exercice : la résolution des équations de degré 1 et le niveau celui de la classe de Seconde.

⁷ Nous ne voulions pas imposer 3 séances par élève, ce qui souvent nécessite 6 séances par classe du fait que la classe ne peut travailler en salle informatique que par moitié.

L'EXP93 a eu lieu au début de l'année courant les mois de septembre et octobre 2003 auprès de 181 élèves de 5 classes de Seconde avec des conditions similaires que l'EXP92. Les élèves ont travaillé individuellement en salle informatique sous la responsabilité de leur professeur de mathématiques.

Il était prévu que l'expérimentation se déroule en 3 séances d'une heure ou de deux séances d'une heure. L'expérimentation avec trois séances se décompose en 5 phases : (1) 20 minutes de prise en main avec une vérification permanente des calculs; (2) 30 minutes sans vérification des calculs (pré-test) ; (3) 50 minutes avec vérification des calculs à la demande (phase de renforcement) ; (4) 30 minutes sans vérification des calculs (post-test) ; (5) 20 minutes avec une vérification permanente des calculs, les exercices de cette phase sont ceux de la phase 4, ce qui permet une autocorrection de la phase 4. La contrainte du temps, et surtout l'accès à la salle d'informatique qui se fait en demi-groupes, ont fait que la quasi totalité des enseignants ont fait deux séances de 50 min. Nous avons proposé 15 exercices pour la phase 2 et 17 exercices pour la phase 4.

Les protocoles d'EXP93 ont permis de poursuivre les travaux d'analyse manuelle et de classification automatique. Ils ont permis de réaliser les travaux de construction de conceptions.

3.3.5 EXP-Annemasse

L'analyse manuelle des protocoles d'EXP93 nous a permis de construire un modèle de conceptions et le processus de leur diagnostic automatique par ANAÏS. Mais ce processus de diagnostic automatique devait être validé sur un effectif réduit de protocoles pour être confronté à une analyse manuelle. Nous avons aussi cherché à vérifier la stabilité des comportements des élèves pour le diagnostic des conceptions.

Pour cela, nous avons mis en place une expérimentation avec une seule classe de 2nd, qui a utilisé APLUSIX pendant toute l'année. L'expérimentation s'est déroulée au mois de mars 2003 auprès de 27 élèves. Les élèves ont eu à résoudre 20 exercices prenant en compte différentes variables du contexte concernant les équations et inéquations de degré 1 et sans limitation du temps.

Les protocoles d'EXP-Annemasse ont permis d'affecter manuellement les conceptions a priori pour comparer cette affectation manuelle à l'affectation automatique et mettre au point l'affectation automatique. Ils ont aussi servi à la construction de conceptions par apprentissage automatique.

3.3.6 EXP-Brésil

EXP-Annemasse a validé notre modèle de conceptions et le mécanisme de diagnostic automatique des conceptions. Nous avons voulu faire fonctionner ce modèle sur un échantillon important de protocoles. Nous avons donc mis en place une expérimentation au Brésil auprès de 2500 élèves de la classe 8^e du Brésil qui correspond à la classe de 3^e en France pour ce qui est de l'âge, mais pour le curriculum en algèbre, elle correspond à la classe de 2nd de l'enseignement français.

L'expérimentation a été organisée dans des établissements publics gérés par la mairie de Campo-Grande. Les consignes d'expérimentation ont présentées par le chercheur Marilena Bittar aux responsables des laboratoires informatiques et aux enseignants qui les ont encadrées. Chaque élève a travaillé sur un un poste de façon individuelle.

Nous avons mis en place deux protocoles. Le premier protocole visait à étudier l'apprentissage effectué APLUSIX, s'est déroulé en 4 phases de 30 minutes chacune : familiarisation, Test1, Entraînement et Test2. Dans chaque phase nous avons proposé 14 exercices sur les équations et inéquations du premier degré. Le second protocole visait à produire un maximum d'informations pour le calcul de conceptions, en plaçant principalement les élèves en mode « test ». Il s'est déroulé en deux phases : familiarisation (30 min) et test (50 min).

Les protocoles d'EXP- Brésil ont permis d'effectuer une affectation automatique de conceptions a priori à un très grand nombre d'élèves.

3.3.7 Tableau synoptique des expérimentations

Expérimentation	Date	Séances	Classes	Nombre d'élèves
EXP92	Septembre et octobre 2002	2 fois 50mn	3 ^e , 2 nd et 1 ^{re}	91 élèves de 3 ^e 108 élèves de 2 nd 47 élèves de 1 ^{re}
EXP-Paris	Novembre 2002 et février 2003	1 à 2 fois 50mn	4 ^e et 3 ^e	90 élèves de 4 ^e 72 élèves de 3 ^e
EXP93	Septembre et octobre 2003	2 fois 50mn	2 nd	167 élèves de 2 ^e
EXP-Annemasse	Mars 2003	3 fois 50mn	2 nd	27 élèves de 2 nd
EXP-Brésil	Avril 2004	2 fois 50mn	Equivalent 3 ^e	2500 élèves de 3 ^e

Tableau 2. Les expérimentations.

3.4 Le diagnostic local manuel avec des règles correctes et erronées

3.4.1 Problématique

Deux objectifs principaux, largement interdépendants, nous ont guidé dans la construction de diagnostics :

(i) Aboutir à une meilleure compréhension des mécanismes cognitifs impliqués dans la résolution de problèmes d'algèbre, à travers l'identification de règles erronées mises en œuvre par les élèves dans certains contextes de résolution. Le travail réalisé est décrit dans cette section 3.4.

(ii) A partir de la donnée de protocoles de résolution d'un élève recueillis avec d'APLUSIX, produire un diagnostic automatique identifiant un ensemble de règles correctes et erronées utilisées par cet élève. Le travail réalisé est décrit dans la section 3.5.

Les résultats de ces travaux servent de base aux autres objectifs du projet :

- (i) Attribuer un ensemble de conceptions à un élève (section 3.6 et 3.7).
- (ii) Elaborer des remédiations (section 3.8).

Les deux objectifs du diagnostic reposent sur des analyses de protocoles individuels, qu'elles soient manuelles ou automatiques. Un protocole est constitué d'un ensemble de données comportementales recueillies dans des situations dans lesquelles un sujet est engagé dans une activité cognitive complexe. Il peut s'agir de situations écologiques, dans lesquelles le chercheur ne construit pas de situation expérimentale, de situations de laboratoire dans lesquelles un protocole expérimental est élaboré et où les passations expérimentales se font dans le laboratoire ou de situations mixtes, dans lesquelles le protocole expérimental construit se fait dans le cadre quotidien du sujet (à l'école, au travail, sur le lieu de formation, chez lui...). Un protocole peut être de nature non verbale, verbale ou mixte (regroupant des informations de nature comportementales et verbales). Sa structure peut être constituée d'une succession de tâches, ce qui est le cas en particulier lorsqu'on cherche à identifier des caractéristiques sur lesquelles on fait des hypothèses de stabilité dans le cadre fixé (représentation, connaissances mobilisées, stratégies mises en œuvre), ou d'une même tâche, ce qui est le cas, en particulier, lorsqu'un objectif est de prendre en compte la dynamique de l'évolution de la représentation.

Faire une Analyse de Protocoles Individuels (A.P.I.), c'est élaborer une interprétation d'un protocole. Idéalement cette interprétation aboutit à la création d'un modèle pour lequel l'ajustement des paramètres permet de simuler individuellement les comportements. C'est une analyse à un niveau

fin, dans la mesure où les actions sont prises en compte au niveau individuel et à un niveau élémentaire, dynamique dans la mesure où la séquence est considérée comme plus informative que la fréquence et prise en compte à ce titre, mettant en évidence les différences interindividuelles : le modèle général est particularisé pour pouvoir rendre compte des comportements à un niveau individuel. Une approche d'A.P.I. comporte des différences et des complémentarités par rapport à une approche statistique. En particulier, les analyses statistiques de groupe visent à évacuer le bruit par un regroupement de données intra et interindividuelles alors que les A.P.I. visent à faire émerger la cohérence : le « bruit » statistique est vu comme une variabilité que l'on cherche à expliquer. En outre, une A.P.I. s'inscrit dans un cadre théorique dont le degré de précision conditionne la possibilité de constructions de modèles alors que les méthodes statistiques tirent une part de leur légitimité du fait même de leur relative autonomie par rapport au champ d'étude. En fait, une A.P.I. peut être vue comme une finalité naturelle d'études quantitatives : ces dernières permettent de mettre en évidence des phénomènes stables sur une population et/ou en intra sujet et les A.P.I. intègrent ces résultats dans la visée de construire des modèles plus fins du comportement.

L'objectif général d'une A.P.I. est de remonter de l'observation à sa source. Ainsi un protocole est vu comme la trace d'un processus. On cherche notamment à identifier les objectifs du sujet, qui reposent généralement sur la mise en œuvre d'heuristiques et sont influencés par des conceptions.

Dans le cadre de ce projet, nous avons conduit des analyses de protocoles individuels sur différentes populations d'élèves visant à mettre en évidence les erreurs systématiques observées dans le but d'identifier, à travers un diagnostic automatique, les conceptions erronées à la source de ces erreurs. Nous faisons l'hypothèse que les élèves possèdent des conceptions erronées qui sont susceptibles de subsister malgré l'enseignement et en tout cas d'influencer les stratégies de résolution. Tout un ensemble de travaux sur les raisonnements naïfs ou intuitifs vont dans ce sens. Un point de vue sur les modèles dits intuitifs (voir aussi les notions de préconception : Ausubel, 1968; Tirosh & Graeber, 1991; de *misconception*: Caramazza et al. 1981 ; de *'folk theory'* : Kempton, 1987; de *théorie intuitive* : McCloskey & Kargon, 1988; de *modèle tacite* : Fischbein, 1989) est de considérer que les conceptions naïves sont fondées largement sur les expériences quotidiennes, dont elles constituent des abstractions minimales. Par exemple, Kempton (1987) a noté que de nombreux adultes se représentent le thermostat d'un radiateur par analogie à une valve : de la même façon qu'une pédale d'accélérateur contrôle la quantité d'essence injectée dans un moteur, la chambre est supposée chauffer d'autant plus vite que le thermostat est positionné sur une valeur plus élevée. Collins et Stevens (1984) ont vu que certains débutants en électricité considèrent un interrupteur électrique comme la gâchette d'un revolver, envoyant une impulsion du générateur électrique jusqu'à la lampe, et Piaget (1926) a observé que certains enfants expliquent le cycle nuit jour, par exemple que lorsqu'il fait nuit en Europe, il fait jour aux Etats-Unis, en proposant un modèle de la terre comparable à un gâteau à plusieurs couches : il y a une terre plate Amérique sous la terre plate Europe. La nuit, le soleil descend à travers la couche européenne et illumine la couche américaine. Samarapungavan & Wiers (1997) ont montré que certains enfants avaient une conception de l'origine des espèces de type génération spontanée dans laquelle les espèces ont émergé du sol à partir de graines, comme les plantes. Des études sur les conceptions des enfants dans le domaine de la biologie naïve (Hatano & Inagaki, 1994) ainsi que sur la forme de la Terre (Vosniadou & Brewer, 1992) le confirment également.

Plus directement pertinents, relativement aux conceptions algébriques, des travaux portant sur les apprentissages des mathématiques élémentaires ont montré que les élèves ont des modèles tacites pour source d'interprétation, construits à partir d'une variété d'expériences quotidiennes, d'une portée générale, qui guident l'interprétation des concepts mathématiques et qui subsistent après que les notions formelles mathématiques correspondantes aient été acquises. La théorie des modèles tacites a été proposée par Fischbein (Fischbein, 1987, 1989, 1994; Fischbein et al. 1985). Pour Fischbein et al. (1985), « chaque opération fondamentale en arithmétique reste généralement attachée à un modèle intuitif, primitif, implicite et inconscient. L'identification de l'opération nécessaire pour résoudre un problème... n'est pas directe mais est faite par l'intermédiaire du modèle » (p. 4). Fischbein et al. (1985) et Fischbein (1989) ont identifié un certain nombre de domaines sources guidant l'interprétation de notions mathématiques élémentaires. C'est le cas du signe égal interprété selon la métaphore « processus-produit » plutôt que comme une équivalence. Ainsi, Ginsburg (1977) a montré

que des enfants n'acceptent pas l'écriture $? = 3+4$ au lieu de $3+4=?$, et que $3=3$ est interprété comme $6-3=3$ ou $7-4=3$. Kieran (1981) a observé que $4+5=3+6$ donnait lieu à des commentaires comme « Après le '=', il devrait y avoir la réponse. C'est la fin et pas un autre problème » (p. 319).

Concernant la multiplication, Bell et al. (1981) ont montré que changer simplement les valeurs numériques d'un problème de multiplication pouvait modifier la procédure de résolution : en demandant à des élèves de 12 à 15 ans le prix de 0.22 gallons d'essence si un gallon coûte £ 1.22, la réponse la plus fréquente était 1.22/0.22. Pour des valeurs entières, par exemple 5 gallons au prix unitaire de £ 2, les élèves proposaient la réponse correcte : 5×2 . Ce type de résultat peut être prédit si la multiplication est interprétée comme une situation d'addition répétée. Il en est de même pour la division, conceptualisée comme une situation de partage. Fischbein et al. (1985) ont observé, auprès d'élèves de collège en Italie, des différences de résultats massives selon que l'opération respecte ou non les contraintes d'une situation de partage. Par exemple, il apparaît que résoudre *Avec 75 roses, on peut faire 5 bouquets identiques. Combien de roses seront dans chaque bouquet ?* (93% de réussite) est nettement plus facile que résoudre *15 amis ont acheté ensemble 5 kg de cookies. Combien chacun en a-t-il reçu ?* (28% de réussite, car dans un partage prototypique, la quantité à partager est plus grande que le nombre d'individus qui se partagent cette quantité). En se référant à Fischbein (1989, 1994), on peut analyser ainsi les caractéristiques des modèles tacites :

(i) Ces modèles sont des entités structurales. Ils ne consistent pas en l'application d'une règle unique, mais permettent de construire une interprétation globale, unitaire et signifiante d'un phénomène et d'un concept. Ainsi, un ensemble d'erreurs commises ou de conceptions erronées peuvent sembler à première vue sans rapport, mais être en fait le produit d'une même conception naïve.

(ii) Ces modèles sont de nature concrète, pratique et comportementale. Ils sont construits à travers un ensemble d'expériences répétées.

(iii) Ils sont simples, économiques à appliquer, directement représentables en termes d'actions. Cela explique leur rôle privilégié dans le processus de raisonnement.

(iv) Ils sont capables d'imposer un certain nombre de contraintes à la situation.

(v) Ils sont robustes, en ce qu'ils sont capables de subsister même après que la notion formelle soit acquise.

Notre parti pris, en l'absence de résultats convergents et suffisamment exhaustifs sur les préconceptions en algèbre, a été de construire un panel d'exercice et d'analyser les erreurs produites. Autrement dit, nous avons eu l'ambition de dresser, pour un niveau donné, une « carte » des règles erronées et des conceptions sous-jacentes, susceptibles de relever de conceptions naïves.

De manière conjointe, nous avons cherché à tester la robustesse des analyses effectuées par la construction d'indices sur le caractère systématique de l'usage des règles identifiées, étant bien évident que les diagnostics portés sur les protocoles n'ont d'intérêt que si l'on observe une certaine stabilité des comportements. Ainsi, pour une partie de notre étude, nous avons conjugué des observations dans 2 cadres. Sur un ensemble d'élèves de 3^e (EXP92), nous avons cherché à identifier un ensemble de règles concernant un large champ d'exercices. Sur un ensemble d'élève de 4^e, nous avons pris le parti de nous centrer sur un sous-domaine de l'algèbre : la résolution d'équations du premier degré, avec l'ambition d'effectuer un travail permettant d'identifier les contextes d'application des règles et qui soit reproductible, si la méthodologie s'avère satisfaisante, sur d'autres sous-domaines. Etant donnée la lourdeur de ce travail, et la perspective d'atténuer cette lourdeur par la construction d'un diagnostic automatique, nous n'avons procédé de cette manière que pour une partie des données recueillies.

Il est à noter que ce projet est particulièrement novateur dans la mesure où, à notre connaissance, aucune recherche n'avait visé une mise en évidence exhaustive, centrée avant tout sur l'analyse d'un large ensemble de données, et ce y compris sur un sous-domaine.

Au delà des règles identifiées, les analyses de protocoles individuels constituent des apports dans au moins deux directions :

(i) Se prononcer sur la stabilité des comportements des élèves dans l'usage des règles erronées. En effet, il est souvent postulé une relative stabilité des conceptions. Certaines analyses permettront de tester si les élèves sont stables dans l'usage des règles erronées. Cette stabilité est essentielle dans une optique de remédiation car elle conditionne la pertinence du diagnostic.

(ii) Evaluer la pertinence du diagnostic automatique en fournissant une base de comparaison afin pouvoir comparer le résultat des analyses manuelles et des analyses automatiques

3.4.2 Les données et l'outil de visualisation

Les données ont été recueillies avec le logiciel APLUSIX. Chaque action de l'élève est enregistrée dans un fichier au format csv (lignes composées de champs séparés par des points-virgules), cf. figure 6. Le logiciel APLUSIX permet de voir en différé la forme finale des exercices, cf. figure 7 ; son magnétoscope permet d'observer le détail des actions, cf. figure 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	No	duree	action	erreur	etape	expression	etat	curseur	selection
2	1	0.0	enonce	()	0	-{(3)/[5]}x={[3]/[8]}	()	(0 0 0 0 0 devant)	rien
3	2	6.1	dupliquer	()	1	-{(3)/[5]}x={[3]/[8]}	()	(0 0 0 0 0 devant)	rien
4	3	1.0	placerCurseur	()	1	-{(3)/[5]}x={[3]/[8]}	()	(0 0 0 1 0 derriere)	rien
5	4	3.5	BackSpace	()	1	-{(3)/[?]}x={[3]/[8]}	()	(0 0 0 1 dedans)	rien
6	5	0.5	BackSpace	()	1	-3x={[3]/[8]}	()	(0 0 0 0 derriere)	rien
7	6	0.7	placerCurseur	()	1	-3x={[3]/[8]}	()	(1 1 0 derriere)	rien
8	7	0.2	BackSpace	()	1	-3x={[3]/[?]}	()	(1 1 dedans)	rien
9	8	0.3	BackSpace	()	1	-3x=3	()	(1 0 derriere)	rien
10	9	1.2	dupliquer	()	2	-3x=3	()	(1 0 derriere)	rien
11	10	1.0	placerCurseur	()	2	-3x=3	()	(0 0 1 devant)	rien
12	11	0.2	BackSpace	()	2	-x=3	()	(0 0 devant)	rien
13	12	0.8	placerCurseur	()	2	-x=3	()	(1 0 derriere)	rien
14	13	0.1	BackSpace	()	2	-x=?	()	(1 dedans)	rien
15	14	2.2	1	()	2	-x=1	()	(1 0 derriere)	rien
16	15	1.0	dupliquer	()	3	-x=1	()	(1 0 derriere)	rien
17	16	1.2	placerCurseur	()	3	-x=1	()	(0 0 devant)	rien
18	17	1.1	BackSpace	()	3	x=1	()	(0 devant)	rien
19	18	0.7	placerCurseur	()	3	x=1	()	(1 0 devant)	rien
20	19	1.5	-	()	3	x=-1	()	(1 0 0 devant)	rien
21		2.1	resolu	()	3	x=-1	()	(1 0 0 devant)	rien

Figure 6. L'exercice ci-dessus tel qu'il est enregistré dans le fichier du protocole, en format csv. Les informations permettent de rejouer, action par action, y compris les placements de curseur et les sélections, le comportement de l'élève à l'aide du magnétoscope logiciel.

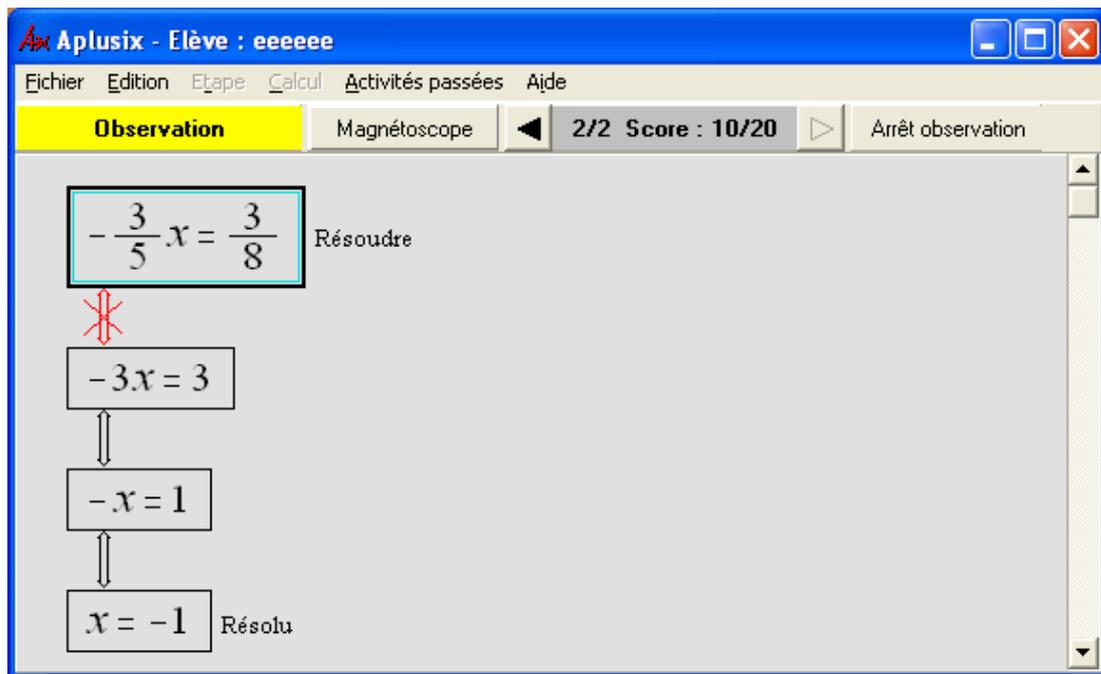


Figure 7. Forme finale d'un exercice. On peut remarquer l'affichage des équivalences entre les étapes (la flèche rouge barrée indique une non-équivalence). Toutes les étapes de calcul de l'élève ne sont pas forcément présentes dans la forme finale, certaines ayant pu être produites puis détruites par l'élève.

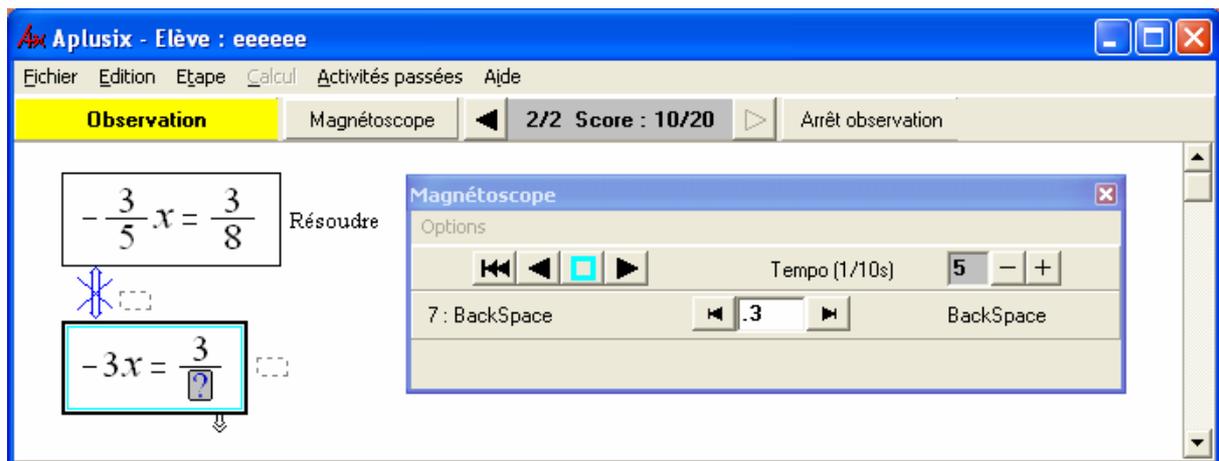


Figure 8. Observation au magnétoscope logiciel de la première étape de l'exercice en cours de construction. Le nom de chaque action est affiché. La progression peut se faire en avant, en arrière, de façon régulière ou en pas à pas.

3.4.3 Production de règles par analyse des comportements des élèves d'EXP-Paris

Les règles permettant d'expliquer chaque transformation d'élève (passage d'une expression à une autre) sont identifiées par l'analyste à partir de l'observation, à l'aide du magnétoscope d'APLUSIX, du détail de la résolution de chaque exercice traité par un ensemble d'élèves. Ces règles sont formulées sur papier. Lorsque nous avons besoin de les distinguer d'autres sortes de règles, nous les appelons *règles de l'analyste*.

Les erreurs ne sont pas systématiquement dues à l'utilisation d'une ou plusieurs règles erronées, elles peuvent apparaître suite à une erreur de calcul ou à une erreur de recopie de l'expression de la ligne précédente.

Pour une part de nos analyses, celle qui porte sur EXP-Paris, nous avons voulu mesurer le caractère prédictif des règles identifiées. Une règle est considérée comme prédictive quand son utilisation seule conduit au résultat donné par l'élève. L'utilisation de plusieurs règles implique qu'aucune des règles utilisées ne soit prédictive de même que la production d'erreurs de calcul ou de copie sur un exercice pour lequel l'élève n'a utilisé qu'une seule règle erronée. Il s'agit d'un critère strict que l'on peut considérer comme regroupant les cas pour lesquels l'automatisation du diagnostic paraît immédiatement accessible. Etant donnée la lourdeur des analyses requises pour le calcul de ces critères, nous ne les avons appliqués que pour une part de la population testée (3 classes de troisième et 3 classes de quatrième). Au sein de cet échantillon, nous avons construit un ensemble d'indices, pour chaque exercice et pour chaque règle

- Le taux d'utilisation de cette règle pour l'ensemble des élèves.
- Le taux d'utilisation relatif qui est le taux d'utilisation, relativement au taux d'échec, qui peut-être vu comme une mesure du caractère « explicatif » de cette règle dans les échecs à cet exercice.
- Le taux de prédictibilité qui est le nombre d'utilisations prédictives rapporté à l'ensemble des utilisations.

3.4.3.1 Les règles produites pour les 3 classes de troisième

Les 72 participants sont les élèves 3 classes de 3^e d'un collège privé parisien. Par rapport à d'autres conditions de passation, nous avons pu organiser des passations en petits groupes (de 8 à 10 enfants) dans la salle d'informatique. Les enfants résolvaient les problèmes en 1h et une seconde séance était prévue pour ceux qui n'avaient pas achevé les résolutions à l'issue de la première séance, ce qui a permis de récolter des protocoles pour l'ensemble des exercices.

En tout, ce sont 104 règles erronées, dont le détail est donné en annexe 1, qui ont été identifiées dans cette expérience. Nous avons regroupé ces règles en 8 catégories:

- Règles sur les puissances : Ce sont toutes les règles qui font intervenir une puissance de x supérieure à 1 ou celles où l'élève ne développe pas la puissance de x qui aurait dû apparaître. (notées de P1 à P10)
- Règles de priorité des opérations : portent sur la réalisation de certaines opérations dans un ordre qui n'est pas le bon. (notées de O1 à O11)
- Règles de factorisation : portent sur la réalisation d'une mise en facteur d'une expression. (notées de F1 à F10)
- Règles de distribution : portent sur tous les types de distributions d'expressions que l'élève peut rencontrer lors de la résolution. (notées de D1 à D18)
- Règles sur les signes : portent sur une mauvaise stratégie liée aux signes + ou -. (notées de S1 à S12)
- Règles d'élimination du coefficient de x dans la résolution d'équations : portent sur la transformation de $ax=b$ en $x=$ constante. (notées de Ed1 à Ed18)
- Règles d'élimination des constantes dans la résolution d'équations : portent sur la transformation de $x+a=b$ en $x=$ constante. (notées de Es1 à Es16)
- Règles de calcul : portent sur les opérations sur les entiers et les fractions et les règles erronées qui ne rentrent pas dans les autres catégories. (notées de C1 à C9)

Cette expérimentation a permis d'identifier un ensemble de règles, associé à des indices de fréquence d'utilisation. Ces indices de fréquences sont utiles dans une perspective d'automatisation du diagnostic car ils permettent de différencier les règles, dites orphelines, qui ne sont mises en œuvre que de manière marginale, et pour lesquelles la non implémentation est acceptable, de celles que l'on observe pour un ensemble important d'élèves qu'il sera nécessaire d'implémenter.

Du fait de la variété des exercices, l'identification du contexte d'application des règles est rendue incertaine, et certains indices de non stabilité des règles peuvent en fait révéler des contextes d'application différents.

De ce fait, il nous a semblé nécessaire de procéder à une analyse plus systématique sur un sous-domaine : la résolution d'équations du premier degré. Ce sous-domaine, essentiel dans le cursus scolaire, nous a semblé le plus à même de permettre l'identification de conceptions erronées. Afin

d'éviter de probables effets plafonds liés à un niveau trop élevé, cette expérimentation a porté sur des élèves de 4^e, après qu'ils aient déjà étudié la résolution des équations élémentaires de type $ax+b=cx+d$.

3.4.3.2 Les règles produites pour les 3 classes de quatrième

Les 90 participants sont les élèves de trois classes de 4^e d'un collège privé parisien.

Procédure

On présente à chaque participant une liste de 30 exercices par l'intermédiaire du logiciel APLUSIX. Les passations sont collectives (par groupes de 8 à 12).

Chaque élève s'installe devant un ordinateur. Après qu'il se soit attribué un identifiant, le premier exercice de la liste lui est présenté. La consigne est de résoudre les exercices les uns après les autres (on précise que si un exercice est passé l'élève ne pourra pas revenir dessus). On explique aux élèves comment passer d'un exercice à l'autre, comment créer une étape et comment utiliser l'interface pour écrire les fractions ou les parenthèses. On précise que le logiciel ne permet pas l'écriture des nombres décimaux et que par conséquent il est nécessaire de réduire les fractions au maximum.

Les élèves avaient une heure pour résoudre tous les exercices de la liste, toutefois, pour ceux qui n'avaient pas terminé les 30 exercices à la première passation, était organisée une séance supplémentaire.

Typologie d'exercices

Le but de l'expérience étant de trouver des modèles exhaustifs de la résolution d'équation, la liste est construite de telle manière que chaque procédure que l'élève est capable d'appliquer en 4^e sur des équations très simples soit représentée. On fait varier de la manière la plus systématique possible les facteurs expérimentaux. Les 15 exercices sont tous des équations du premier degré à une inconnue du type : $ax+b=cx+d$. Leur liste est fournie dans le tableau 3 ; elle est reprise en annexe 2 avec les contraintes choisies.

Afin de ne pas rendre trop évidente l'isomorphie entre les 15 exercices tests, nous avons alterné avec des exercices de remplissage, qui étaient d'autres problèmes d'algèbre, mais qui ne concernaient pas la résolution d'équations du premier degré.

Quatre ordres de passation ont été construits de manière à limiter les biais systématiques liés à des effets d'apprentissages ou à des baisses du niveau attentionnel.

$-\frac{1}{4}x = 6$	$\frac{1}{7}x = 3$	$7 = 28x$	$-4x = -27$	$12 - 6x = -15x - 3$
$8x - 11 = 7 + 10x$	$2 = -x + 15$	$-9 = x - 7$	$11 - x = -12$	$-x + 2 = 7 + x$
$-3 + 2x = -2x - 2$	$-\frac{7}{2}x = 5$	$\frac{3}{8}x = 4$	$9x = \frac{27}{2}$	$-11x = -\frac{22}{2}$

Tableau 3. Liste des exercices de l'expérimentation EXP-Paris pour la classe de 4^e.

Résultats d'ensemble

La réussite aux exercices est évaluée de manière binaire, à l'exception des résolutions partielles, sans réduction de fraction, qui sont notées 0,5. On note le niveau relativement peu élevé des réussites (Tableau 4) avec une moyenne générale de 0,37, ce qui incite à penser que les règles erronées sont largement utilisées, comme nous l'avons testé par l'analyse des protocoles individuels.

Exercice	énoncé	Type	4°1/30	4°2/30	4°3/30	total/90
A	$-1/4 x=6$	résoudre	4,5	1,5	14	20
B	$\frac{x}{7} = 3$	résoudre	17	19	26	62
C	$7=28x$	résoudre	8	6	15	29
D	$-4x=-27$	résoudre	12	6	21	39
E	$12-6x=-15x-3$	résoudre	11	6	16	33
F	$8x-11=7+10x$	résoudre	12	6	10	28
G	$2=-x+15$	résoudre	20	15	18	53
H	$-9=x-7$	résoudre	9	9	14	32
I	$11-x=-12$	résoudre	13	11	11	35
J	$-x+2=7+x$	résoudre	12	4	13	29
K	$-3+2x=-2x-2$	résoudre	15	10	16	41
L	$-\frac{7}{2}x = 5$	résoudre	8,5	1,5	8	18
M	$\frac{3}{8}x = 4$	résoudre	10	3,5	15	28,5
N	$9x = \frac{27}{2}$	résoudre	9	4,5	13	26,5
O	$-11x = -\frac{22}{2}$	résoudre	8	4	16	28

Tableau 4. Performance des élèves de 4°.

Typologie des règles

On utilise la même classification des règles que pour la première expérience. Le côté systématique des passations a permis de classer les règles entre elles, toujours par nombre d'utilisations mais aussi par procédure.

On prend toujours en compte pour chaque exercice et pour chaque règle :

- Le taux d'utilisation qui est le pourcentage d'utilisations sur la totalité des élèves.
- Le taux d'échec qui est le pourcentage d'échecs sur cet exercice toutes règles confondues.
- Le taux d'utilisation relatif qui est le nombre d'utilisations de cette règle sur l'ensemble des élèves par rapport au nombre d'échecs total toutes règles confondues.
- Le taux de prédictibilité qui est le nombre d'utilisations prédictives de cette règle pour cet exercice sur l'ensemble des utilisations.

Grâce à cet outil on peut considérer les élèves un à un et différencier encore une fois les stratégies stables de celles qui ne le sont pas. Le tableau 5 indique les utilisations des règles pour quelques élèves. Le tableau contenant tous les élèves est fourni en annexe 3.

élèves	règles/échecs	prédictible/échecs	prédictibilité	calcul	inachevé	impasse
beck	62,50%	37,50%	60,00%	37,50%	25,00%	6,25%
bert	40,00%	40,00%	100,00%	13,33%	26,67%	13,33%
beri	42,86%	42,86%	100,00%	7,14%	0,00%	50,00%
bong	50,00%	36,36%	72,73%	27,27%	31,82%	13,64%
dasi	65,22%	52,17%	80,00%	30,43%	17,39%	4,35%
dupo	55,17%	17,24%	31,25%	37,93%	20,69%	0,00%
frac	75,00%	75,00%	100,00%	25,00%	0,00%	0,00%

Tableau 5. Utilisations de règles élève par élève. Le tableau complet est fourni en annexe 3.

Sur l'ensemble des exercices échoués, nous avons pu identifier une règle erronée pour 58% d'entre eux. La moyenne du nombre de règles utilisées par les élèves est de 9,76 sur un nombre moyen de 16,83 échecs. On peut les expliquer par la fréquence des erreurs de calcul (moyenne de 4,4 erreurs par élève), par celle des exercices inachevés (moyenne de 3,28) et le taux d'impasses (avec une moyenne de 2,07). Ces valeurs ne sont pas cumulables, car les catégories précédentes ne sont pas exclusives.

On compte 46 utilisations de règles parfaitement stables (Tableau 6). L'indice par lignes, c'est à dire le ratio du nombre de règles parfaitement stables sur le nombre total de règles utilisées, est de 0,13. Peu d'élèves sont systématiques. On peut l'expliquer par l'occurrence très grande des exercices de même type : il n'est pas exclu que les élèves aient une idée très stable de la procédure à appliquer, mais que plus le nombre de fois où ils doivent utiliser la règle est élevé et plus on risque de voir apparaître des erreurs de calcul ou d'inattention.

élèves	stable	moy. stable	non stable	total
beck	1	2	3	6
bert			1	1
beri	1	1		2
bong	2	1	1	4
dasi		4	1	5
dupo		4		4
frac			3	3
.....
total	46	162	152	360

Tableau 6. Stabilité des règles élève par élève. Le tableau complet est fourni en annexe 4.

On compte 46 utilisations de règles parfaitement stables, l'indice par lignes est de 0,13 sur le total de règles utilisées. Peu d'élèves sont systématiques. On peut l'expliquer par l'occurrence très grande des exercices de même type : il n'est pas exclu que les élèves aient une idée très stable de la procédure à appliquer, mais que plus le nombre de fois où ils devront utiliser la règle est élevé et plus on risque de voir apparaître des erreurs de calcul ou d'inattention.

En revanche, on compte 162 utilisations de règles moyennement stables, l'indice par lignes est de 0,45 ce qui montre que près de la moitié des élèves utilisent les règles qui rentrent dans leur stratégies sur certains exercices mais pas sur d'autres qui pourtant sont du même type.

On observe que 42% des élèves utilisent des règles non stables sur une liste d'exercice (152). On peut supposer qu'à ce stade de l'apprentissage de l'algèbre (la passation se déroule en fin d'année) les conceptions algébriques naïves sont concurrencées par les conceptions expertes qui sont répétées en classe très régulièrement.

Les indices en colonnes sont respectivement de 0,27 pour les règles stables, 0,51 pour les règles moyennement stables et 0,51 pour les règles non stables. Quand ils utilisent une règle, les élèves de 4^e la choisissent préférentiellement de manière non stable ou moyennement stable.

3.5 Un diagnostic local automatique avec des règles correctes et erronées

3.5.1 Problématique

Nous voulons ici diagnostiquer, de façon automatique, un nombre important de transformations d'élèves pour déterminer des régularités, en termes de règles appliquées par les élèves, permettant de rechercher ensuite des conceptions. Une classe ayant travaillé avec APLUSIX pendant deux heures produit généralement plus de 1000 transformations à diagnostiquer et nous avons des dizaines de classes à étudier. Il y a donc un problème de rapidité : il faut rechercher des méthodes rapides, quitte à avoir un peu moins de diagnostics. Ainsi, certaines règles utilisées peu fréquemment dans les diagnostics manuels peuvent-elles être laissées de côté.

Sur la durée du projet, dans le cadre de l'ACI, nous nous sommes focalisés sur les actions sur les équations et inéquations linéaires et nous avons conduit les travaux jusqu'au bout de la chaîne envisagée en début de projet : représentation informatique des règles, diagnostic automatique des actions avec des règles, construction manuelle de conceptions a priori, affectation automatique de conceptions a priori, construction automatique de conceptions. Il faut noter que cette focalisation sur les actions sur les équations et inéquations linéaires ne permet pas de se limiter aux règles portant sur les équations et inéquations linéaires, celles-ci se combinant souvent avec des réductions. Dans cette section, nous allons principalement développer le travail de représentation informatique des règles et de diagnostic automatique des actions avec des règles pour les actions sur les équations et inéquations linéaires. Nous mentionnerons aussi un travail portant sur les actions de développement et de réduction qui a été commencé récemment.

3.5.2 Les règles sur les équations et inéquations linéaires pour le diagnostic automatique

Les règles correctes intervenant dans la résolution d'équations et inéquations linéaires sont constituées de règles portant sur des sous-expressions fonctionnelles (calculs numériques, développements et réductions d'expressions polynomiales) et de règles spécifiques des équations et inéquations. Ces règles spécifiques sont d'abord les règles fondamentales d'opérations sur les deux membres (ajout, soustraction, multiplication, division) :

$$\text{Règle 1 : } A = B \rightarrow A+C = B+C$$

$$\text{Règle 2 : } A = B \rightarrow A-C = B-C$$

$$\text{Règle 3 : } A = B \rightarrow AC = BC \text{ (} C \neq 0 \text{)}$$

$$\text{Règle 4 : } A = B \rightarrow A/C = B/C \text{ (} C \neq 0 \text{)}$$

Les règles 1 et 2 se combinent avec des réductions pour produire des règles compilées (Anderson 1983) que nous appellerons des *règles de mouvement additif* car, dans ces règles, une expression additive passe d'un membre à l'autre (en changeant de signe) :

$$\text{Règle 5 : } A+C = B \rightarrow A = B-C$$

$$\text{Règle 6 : } C = B \rightarrow 0 = B-C,$$

$$\text{Règle 7 : } A = B+C \rightarrow A-C = B$$

$$\text{Règle 8 : } C = B \rightarrow C-B = 0.$$

De façon analogue, la règle 4 produit des règles compilées que nous appellerons des *règles de mouvement multiplicatifs* car, dans ces règles, une expression multiplicative passe d'un membre à l'autre :

$$\text{Règle 9 : } AC = B \rightarrow A = B/C \text{ (} C \neq 0 \text{)} \quad \text{Règle 10 : } C = B \rightarrow 1 = B/C \text{ (} C \neq 0 \text{)}$$

Il faut ajouter les règles pour lesquelles le membre de gauche est une fraction, C étant le numérateur ou un facteur du numérateur. De façon analogue, la règle 3 introduit des mouvements multiplicatifs dans lesquels C est le dénominateur d'une fraction. Il y a ainsi 12 règles de mouvement pour les équations (4 additifs, 8 multiplicatifs).

Les inéquations avec le symbole \neq ont des règles analogues.

Pour les inéquations ($<$ \leq $>$ \geq), les mouvements multiplicatifs sont dédoublés selon le signe sémantique de C. Quand ce signe est positif, nous avons la règle analogue (par exemple : $AC \leq B \rightarrow A \leq B/C$ ($C > 0$)). Quand il est négatif, nous avons une règle avec inversion du sens de l'inégalité (par exemple : $AC \leq B \rightarrow A \geq B/C$ ($C < 0$)).

Il y a ainsi 20 règles de mouvement pour chaque sorte d'inéquation (4 additifs, 16 multiplicatifs).

L'acquisition de compétences en résolution d'équations et inéquations s'effectue généralement à l'école en utilisant d'abord les règles fondamentales, puis en utilisant les règles de mouvement. Les règles fondamentales sont généralement fournies de façon formelle et/ou sous la forme de règles d'action (par exemple : *on peut ajouter une même quantité au deux membres d'une équation*). Le nombre important de règles de mouvement ($104 = 2 \cdot 12 + 4 \cdot 20$) suggère que leur acquisition ne se fait pas sous la forme de règles indépendantes. D'ailleurs, ces règles ne sont jamais fournies aux élèves de façon exhaustives.

Modélisation des mécanismes de mouvement dans les (in)équations par une règle unique

Nous modélisons un ensemble de mécanismes de mouvement, corrects ou erronés, dans les relations (équations ou inéquations) par une règle unique décrite comme suit.

Un mouvement additif porte sur une sous-expression que nous appelons argument : c'est l'objet qui passe d'un membre dans l'autre. L'argument est additif, ce qui signifie qu'il se trouve dans une somme située dans un membre de l'équation ou qu'il est lui-même un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore additif, dans l'autre membre, et il a changé de signe syntaxique (le signe syntaxique provient de la présence ou non de « - » devant l'argument, par exemple : $-3x$ a pour signe syntaxique « - »).

Un mouvement multiplicatif a aussi un argument. L'argument peut être « multiplicatif au numérateur », ce qui signifie qu'il est un facteur d'un membre de l'équation ou du numérateur d'une fraction qui est un membre de l'équation ; l'argument peut être « multiplicatif au dénominateur », ce qui signifie qu'il est un facteur du dénominateur d'une fraction qui est un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore multiplicatif dans l'autre membre (au dénominateur s'il vient du numérateur et au numérateur s'il vient du dénominateur), il n'a pas changé de signe syntaxique, mais, dans le cas d'une inéquation, le sens de l'inéquation a changé si le signe sémantique (nombre positif ou négatif) de l'argument est négatif.

Nous pouvons maintenant décrire les mouvements avec une seule règle, intitulée *Mouvement*, auquel nous associons un vecteur de sept traits dont les noms sont indiqués ci-dessous, suivis des valeurs qu'ils peuvent prendre :

Symbole de relation : parmi (= ≠ < ≤ > ≥).

Orientation horizontale du mouvement : parmi (GaucheDroite DroiteGauche).

Orientation verticale du mouvement : parmi (NumVersNum, NumVersDeno, NumVersDeno, DenoVersNum, DenoVersDeno), « Num » pour numérateur et « Deno » pour dénominateur.

Position de l'argument à l'origine

PosOrgArgEstAdd : si la position d'origine de l'argument est additive.

PosOrgArgEstMult : si la position d'origine de l'argument est multiplicative.

Position finale de l'argument

PosFinaleArgEstAdd : la position finale de l'argument est additive.

PosFinaleArgEstMult : la position finale de l'argument est multiplicative.

Changement de signe de l'argument

ChangeSigneArg : le signe de l'argument est changé lors du mouvement.

ChangePasSigneArg : le signe de l'argument n'est pas changé.

Changement de sens

ChangePasSens : le sens de l'inégalité n'est pas changé.

ChangeSens : le sens de l'inégalité est changé.

Par exemple, la transformation erronée $2x-4 \leq 5 \rightarrow 2x \geq 5-4$ est représentée par un *Mouvement* de -4 de vecteur : (\leq , GaucheDroite, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg, ChangeSens). La règle détaillée correspondante peut être produite à partir du vecteur, c'est : $A+C \leq B \rightarrow A \geq B+C$.

La règle unique de mouvement n'est pas une règle de l'analyste, mais une classe de règles de l'analyste. Une règle de l'analyste concernant un mouvement est obtenue en instanciant les traits de la règle de mouvement, comme dans le paragraphe précédent aboutissant à $A+C \leq B \rightarrow A \geq B+C$.

Il faut noter que l'analyse ci-dessus, qui conduit à la règle unique de mouvement, combine des aspects cognitifs et épistémiques. Elle organise un nombre important de règles attribuées aux élèves par l'analyste en un objet proche des règles de mouvement utilisées par l'expert. Toutes les règles attribuées aux élèves par l'analyste ne sont toutefois pas prises en compte, certaines règles de façon délibérée, car l'analyste a parfois tendance à vouloir tout expliquer (et toute transformation peut être décrite par une règle), ce qui n'est pas l'objectif du diagnostic automatique ; d'autres règles parce que le travail la modélisation n'est pas terminé.

3.5.3 L'algorithme de diagnostic

L'algorithme de diagnostic que nous avons mis en œuvre est un algorithme de recherche heuristique (Pearl 1984) de type meilleur d'abord. Un tel algorithme manipule des objets ou des états (dans notre cas, des expressions algébriques) à l'aide d'opérateurs (dans notre cas, des règles de réécriture) et utilise une heuristique pour guider la recherche, l'heuristique étant une fonction s'appliquant à deux objets et fournissant une mesure de proximité entre ces deux objets. Les données initiales sont constituées de deux objets, dans notre cas, les expressions algébriques A et B composant une transformation d'élève (l'élève a transformé l'expression A en B). L'algorithme recherche une suite d'opérateurs (dans notre cas, de règles de réécritures correctes ou erronées) permettant de passer de A à B. Pour cela, il construit un arbre de recherche, dont la racine contient A, en développant successivement des nœuds. Développer un nœud N consiste à lui appliquer toutes les règles qui sont applicables à l'objet qu'il contient, et à engendrer un successeur de N à chaque fois, sauf lorsque l'on obtient un objet que l'on a déjà engendré. Cet algorithme est décrit en figure 9.

```
// On cherche à aller de A à B en appliquant des opérateurs
Construire un arbre T d'un seul nœud R contenant l'objet A
Construite une liste NonDev contenant le seul nœud R
// NonDev est la liste des nœuds non développés
Dev := nil // Dev est la liste des nœuds déjà développés
Si A=B alors Z := R sinon Z := nil finsi
// Z est le nœud résultat, on regarde si le but est déjà atteint
NumeroPasse := 1 // compte les tours de la boucle

Tant que Z ≠ nil et NonDev ≠ nil
    et NumeroPasse < NombrePasseMaxi faire
        NumeroPasse := NumeroPasse + 1
        Choisir dans NonDev le nœud N qui est le plus proche du but
        Enlever N de NonDev
        Ajouter N à Dev
        Déterminer la liste LO des opérateurs applicables à N
        Pour tout opérateur O de LO faire
            Appliquer O, ce qui produit un objet C
            Ajouter un successeur N1 contenant C au nœud N
            Attribuer à N1 l'opérateur O
            Si C n'appartient pas à Dev
                Ou C appartient à Dev et N1 a un coût inférieur alors
                    Ajouter N1 à la liste NonDev
                    Si C=B alors Z := N1 // On regarde si le but est atteint
                finsi
            Finsi
        FinPour
    FinTantque

Si Z ≠ nil alors
    Construire le chemin CH allant de R à Z
    Rendre CH et la liste des opérateurs attribués aux nœuds
Sinon rendre échec
Finsi
```

Figure 9. Algorithme du meilleur d'abord. L'algorithme développe toujours le nœud le plus proche du but, au sens de l'heuristique. Le coût est une fonction qui s'applique à un chemin de l'arbre et se calcule comme la somme des coûts de chaque opérateur appliqué sur ce chemin. Lorsque l'on retrouve un objet déjà engendré, on le conserve si le nouveau chemin qui va à cet objet a un coût moindre, on l'ignore sinon.

La théorie de la recherche heuristique comporte des notions de convergence et de minimalité du coût. Lorsque les opérateurs et l'heuristique ont certaines propriétés, des théorèmes assurent la convergence ou le fait que la première solution obtenue soit la meilleure.

La situation de l'algèbre est difficile pour la recherche heuristique. L'heuristique qui compare deux expressions X et Y doit estimer le coût du passage de X à Y par l'application de règles, sans effectuer ce passage (sans appliquer de règle). L'algèbre a pour propriété de ne pas avoir de lien fort entre les formes syntaxiques et leurs sémantiques (par exemple, la modification d'un nombre dans une équation, qui produit une expression syntaxiquement très proche, peut faire passer d'une équation ayant deux solutions à une équation n'en ayant pas). L'heuristique que nous avons choisie utilise la distance qui est décrite en figure 10.

La distance utilise enfin une fonction Complexité d'une expression qui se calcule ainsi :

La complexité d'un entier est 1
 La complexité d'une variable est 8
 La complexité d'un opérateur appliqué à des arguments est 8 plus la somme des complexités des arguments

Calcul de la distance

Si A et B sont égales modulo la commutativité **Alors** la distance est 0
Si A et B sont égales modulo l'associativité et la commutativité **Alors** la distance est 1
Si A et B sont égales modulo la commutativité quand on a supprimé les parenthèses inutiles et les signes « - » **Alors** la distance est 2
Si B est égal à A en ajoutant ou enlevant un opérateur unaire à la racine **Alors** la distance est 8
Si B est égal à A en ajoutant ou enlevant un argument **Alors** la distance est la complexité de cet argument
Si A et B ont même opérateur et un seul argument différent **Alors** la distance est celle qu'il y a entre les arguments qui diffèrent
Si A et B ont même opérateur et plusieurs arguments différents **Alors** la distance est la somme des complexités des arguments qui diffèrent
Si A et B ont des opérateurs différents **Alors** la distance est la somme des complexités des arguments qui diffèrent augmentée de 8

Figure 10. Distance entre deux expressions algébriques pour l'algorithme de recherche heuristique.

L'heuristique que nous avons choisie n'assure pas de trouver le meilleur diagnostic en premier. En conséquence, nous avons implanté un algorithme qui ne s'arrête pas dès qu'il a trouvé une solution. Il poursuit la recherche en développant un certain nombre de nœuds et la meilleure solution est retenue lorsque plusieurs solutions sont trouvées.

La situation de l'algèbre est difficile aussi au niveau des opérateurs. En effet, il y a un très fort facteur de branchement (nombre de règles applicables à un nœud) conduisant à une explosion combinatoire. Considérons, par exemple, l'équation que l'on peut obtenir en développant $(2x+1)(3x+1) = (3x+2)(2x+3)$ et qui est la suivante : $6x^2+2x+3x+1 = 6x^2+9x+4x+6$. Cette équation comporte 8 termes additifs qui sont tous candidats à un mouvement dans l'autre membre, correct ou erroné. Si l'on considère simplement la règle de mouvement additif correcte et celle de mouvement additif erronée qui consiste à ne pas changer le signe, ces deux règles produisent 16 nœuds successeurs du nœud contenant l'équation. Il y a, bien sûr, d'autres règles applicables à l'équation de l'exemple, en particulier des règles de groupement additif correct ou erroné. Avec un facteur de branchement de 40, un arbre de profondeur 4 possède 404, soit 2 560 000 feuilles, ce qui est inapproprié pour des calculs devant se faire rapidement (les protocoles d'une classe ayant travaillé pendant 2 heures avec APLUSIX compte plus de 1000 transformations à diagnostiquer).

Règles avec but

Pour maîtriser ce problème d'explosion combinatoire, nous avons introduit un concept de règle avec but. Une règle de réécriture classique est une règle qui peut s'appliquer à une sous-expression

d'une expression, sans considération de but (cf. 3.2.2). Les règles avec but que nous avons définies, sont des règles qui prennent en compte un but et dont l'unification peut échouer pour des raisons dues au but. Cela permet de restreindre les applications de règles, donc le facteur de branchement, mais a pour inconvénient d'augmenter potentiellement le taux d'échec, en ne produisant pas parfois le nœud qui conduirait à la solution et aussi d'avoir à écrire parfois plusieurs règles dans le langage informatique pour une même règle conçue par le chercheur. Nous avons utilisé ce type de règle dans les situations apportant un fort taux de branchement, en particulier pour les mouvements. La figure 11 décrit une règle de mouvement additif utilisée pour le diagnostic automatique.

```
// Les variables de règle sont précédées de « ? »
// L'expression de départ est ?a ; le but est ?b
Si ?a est une relation d'opérateur ?oa // = < <= etc.
?b est une relation d'opérateur ?ob // = < <= etc.
?b a pour arguments ?gb et ?db // les 2 membres de la relation
Soit ?lga la liste des termes additifs à gauche de ?a
Soit ?lda la liste des termes additifs à droite de ?a
Soit ?lgb la liste des termes additifs à gauche de ?b
Soit ?ldb la liste des termes additifs à droite de ?b
Soit ?m différence(?lga,?lgb) // éléments en moins à gauche
Soit ?pl différence(?lda,?ldb) // éléments en plus à droite
Soit ?p la liste des opposés de ?pl
Soit ?u un élément de intersection(?m,?p)
// ?u est en moins à gauche, son opposé est en plus à droite
Alors
Produire comme résultat l'expression obtenue à partir de ?a
en enlevant ?u à gauche et en ajoutant son opposé à droite
et en prenant l'opérateur ?ob
```

Figure 11. Description de la règle de mouvement additif RES_MoveAdditifChangeSigne. C'est une règle syntaxique qui ne fonctionne que si l'on repère un terme additif à gauche qui a été enlevé et dont l'opposé a été ajouté à droite (cette règle traite indifféremment le passage de gauche à droite et le passage de droite à gauche). La règle n'impose pas que les deux relations aient le même opérateur (l'opérateur de ?a peut être « < », celui de ?b étant « > », voire « = »). Cette règle est applicable dans le cas où ?a est $2x+3 < 4x-6$ et ?b est $0 > -2x-3+5x-6$, avec deux instances, l'une pour laquelle ?u vaut $2x$ (dont le résultat est $3 > -2x+5x-6$) et l'autre l'une pour laquelle ?u vaut 3 (dont le résultat est $2x > -3+5x-6$). Cette règle est correcte si ?oa est égal à ?ob, erronée sinon. Cette règle ne s'applique pas au cas où ?a est $2x+3 < 5x-6$ et ?b est $3 > 3x-6$. C'est une autre règle qui s'applique dans ce cas.

Représentation informatique de la règle de mouvement

La représentation informatique de la règle de mouvement a été effectuée dans le langage SIM sous la forme de plusieurs règles dont la liste se trouve en figure 12. Lorsque l'une de ces règles est appliquée, les traits de la règle (Symbole de relation, Orientation horizontale du mouvement, etc.) sont calculés. Ainsi, il n'y a pas de correspondance simple entre les règles de l'analyste et les règles SIM. Pour préciser cet aspect, nous appelons *règle ANAÏS* une règle de l'analyste qui est implantée dans le système ANAÏS (dans le cas des mouvements, la règle de mouvement avec ses traits instanciés). C'est elle qui est notre centre d'intérêt dans le diagnostic. Nous appelons *règle SIM* les représentations concrètes des règles dans le langage SIM.

<p>RES_MoveAdditifChangeSigne : mouvement additif reconnu de façon syntaxique ER_MoveAdditifChangePasSigne : mouvement additif reconnu de façon syntaxique RES_MoveAdditifChangeSigneSEM : mouvement additif reconnu de façon sémantique ER_MoveAdditifChangePasSigneSEM : mouvement additif reconnu de façon sémantique</p> <p>SEMI_MoveAdditifToutMemeMembreChangeSigne : mouvement de tout un membre ER_MoveAdditifToutMemeMembreChangePasSigne : mouvement de tout un membre</p> <p>SEMI_MoveNumVersDeno : passage du numérateur au dénominateur SEMI_MoveDenoVersNum : passage du dénominateur au numérateur ER_MoveNumVersDenoChangeSigne : passage du numérateur au dénominateur ER_MoveDenoVersNumChangeSigne : passage du dénominateur au numérateur ER_MoveNumVersNum : passage du numérateur au numérateur de l'autre membre ER_MoveNumVersNumChangeSigne : passage du numérateur au numérateur</p> <p>ER_MoveNumEtInverse : mouvement de la forme $ax=b \rightarrow x=b/a$ ER_MoveNumVersAjout : passage du numérateur à ajout dans l'autre membre ER_MoveNumVersAjoutChangeSigne : passage du numérateur à ajout dans l'autre membre ER_MoveAjoutVersNum : mouvement additif vers numérateur dans relation ER_MoveAjoutVersNumChangeSigne : mouvement additif vers numérateur dans relation ER_MoveAjoutVersDeno : mouvement additif vers dénominateur dans relation ER_MoveAjoutVersDenoChangeSigne : mouvement additif vers dénominateur dans relation</p>

Figure 12. Les 19 règles SIM pour la règle de mouvement de mouvement dans les équations et inéquations. Chaque règle est une règle avec but qui ne s'applique qu'avec des chances assez importantes d'être utile. Ces règles s'appliquent pour n'importe quel opérateur d'équation ou d'inéquation. Le fait de changer ou non le signe de l'argument est inscrit dans le nom de la règle. Les règles commençant par RES sont des règles de résolution (correctes) ; celles commençant par ER sont des règles erronées ; celles commençant par SEMI sont des règles correctes ou erronées selon le contexte. Par exemple, la règle SEMI_MoveNumVersDeno (passage du numérateur au dénominateur) est correcte si la relation est = ou \neq ou si le signe sémantique de l'argument déplacé est positif et l'inégalité ne change pas de sens ou si le signe sémantique de l'argument déplacé est négatif et l'inégalité change de sens.

Isolation

Un autre mécanisme a été implanté pour réduire l'explosion combinatoire, il s'agit de l'isolation des sous-expressions sur lesquelles s'effectue la transformation. Lorsque l'élève passe de l'expression « $2x+3x = 6$ ou $x = 1$ » à l'expression « $6x = 6$ ou $x = 1$ », l'isolation indique qu'il y a eu transformation de $2x+3x$ en $6x$. L'isolation consiste à comparer les deux expressions et enlever les arguments communs. Si on a pu le faire en ne conservant qu'un argument de chaque côté, on recommence récursivement le processus.

L'isolation est une idée simple et naturelle qui souffre cependant de contre-exemples. Ainsi, lorsque l'on a passage de « $2(x+3)=0$ » à « $x+3 = 0$ », l'isolation indique une transformation de « $2(x+3)$ » à « $x+3$ » ; la transformation d'origine est correcte, la transformation isolée est incorrecte ; l'isolation empêche d'appliquer la règle de division des deux membres par 2 puisqu'elle fait disparaître les équations. Une autre famille d'exemple se rencontre lorsque l'on considère que des éléments de contexte font partie de la règle, que c'est parce que A est à côté de B que B est transformé en C, A étant inchangé.

Nous avons résolu ce problème en effectuant une isolation à deux niveaux : l'isolation proprement dite et une sous-isolation dont le résultat est constituée des expressions mères des expressions de l'isolation. Par exemple, pour le passage de « $2x+3x = 6$ ou $x = 1$ » à « $6x = 6$ ou $x = 1$ », l'isolation donne une transformation de « $2x+3x$ » à « $6x$ » et la sous-isolation donne une transformation de « $2x+3x = 6$ » à « $6x = 6$ ». L'isolation produit ainsi deux nœuds dans l'arbre de recherche à la place d'un. Pour limiter l'explosion combinatoire, seules les règles auxquelles on a attribué la propriété de concerner les sous-isolations sont appliquées aux sous-isolations.

Le paramétrage de l'algorithme de diagnostic

Quelques paramètres permettent le réglage de l'algorithme de diagnostic. En voici la liste :

Le nombre maximum de noeuds que l'on développe si l'on ne trouve pas

Nous utilisons généralement 30 ou 50

Le nombre maximum de noeuds que l'on développe après avoir trouvé la première solution

Nous utilisons généralement 20

Le nombre maximum de règles acceptées dans une solution

Nous utilisons généralement 10

Le nombre maximum de règles erronées acceptées dans une solution

Nous utilisons généralement 3

L'utilisation uniquement, ou non, des règles correctes pour les transformations correctes

Nous effectuons généralement cette limitation

L'application immédiate ou non de réductions aux règles ayant la propriété PostReductionDiag

Nous appliquons généralement ces réductions pour les classes de niveau 3e ou plus et pas pour les classes de niveaux inférieures.

3.5.4 Un exemple de diagnostic

(Diagnosticuer $\langle\langle 2x+4 < 7x-6 \rightarrow -5x < -2 \rangle\rangle$)

Avec ces données, trois diagnostics sont produits. Le meilleur est :

- mouvement additif correct de $7x$
- réduction correcte $2x-7x \rightarrow -5x$
- mouvement additif erroné de 4
- calcul correct $-6+4 \rightarrow -2$

L'autre diagnostic est :

- mouvement additif correct de $7x$
- réduction correcte $2x-7x \rightarrow -5x$
- mouvement additif correct de 4
- calcul erroné $-6-4 \rightarrow -2$

La figure 13 montre ce qui est affiché par ANAÏS lorsque l'on a lancé ce diagnostic *à la main*.

```

(Diagnostiquer <<2x+4 < 7x-6 --> -5x < -2>>)

Diagnostic No 1, coût=9 (transformation ERRONEE)
BUT : 2x+4<7x-6 --> -5x<-2
transformation : 2x+4<7x-6 --> 2x+4-7x<-6
  >>> Mouvement additif de 7x (DroiteGauche ChangeSigneArg ChangePasSens correct)

transformation : 2x-7x --> -5x
  >>> Groupement additif (correct)
expression obtenue : -5x+4<-6

transformation : -5x+4<-6 --> -5x<-6+4
  >>> Mouvement additif de 4 (GaucheDroite ChangePasSigneArg ChangePasSens errone)

SOUS-BUT : -6+4 --> -2
transformation : -6+4 --> -2
  >>> par la règle RES_PlusEntier : calcul de la somme de 2 entiers

Diagnostic No 2, coût=10 (transformation ERRONEE)
BUT : 2x+4<7x-6 --> -5x<-2
transformation : 2x+4<7x-6 --> 2x+4-7x<-6
  >>> Mouvement additif de 7x (DroiteGauche ChangeSigneArg ChangePasSens correct)

transformation : 2x-7x --> -5x
  >>> Groupement additif (correct)
expression obtenue : -5x+4<-6

transformation : -5x+4<-6 --> -5x<-6-4
  >>> Mouvement additif de 4 (GaucheDroite ChangeSigneArg ChangePasSens correct)

SOUS-BUT : -6-4 --> -2
transformation : -6-4 --> -2
  >>> par la règle ER_somme : Somme erronée

```

Figure 13. Affichage d'ANAIS lorsque l'on a lancé un diagnostic à la main. Un tel lancement à la main s'effectue dans des phases de mise au point ou lorsque l'on veut étudier quelques transformations. En fonctionnement normal, ANAIS va chercher les transformations à étudier dans des fichiers de protocoles et produit des fichiers de résultats.

3.5.5 Les résultats de l'algorithme de diagnostic sur les actions sur les équations et inéquations

L'ensemble des règles qui ont été implantées pour cet objectif de diagnostic sur les actions sur les équations et inéquations est constitué :

- des règles d'opération sur les deux membres d'une équation ou inéquation,
- de la règle générale de mouvement,
- des règles de résolution d'APLUSIX non incluses dans les précédentes,
- de règles erronées assez générales « avec but » évitant d'engendrer une infinité de règles de calcul erronées, telles que :
 - calcul incorrect, par exemple quand l'expression est 3+5 et le but 7
 - groupement additif incorrect, par exemple quand l'expression est 3x+5x et le but 7x
- des règles de perte d'un opérateur ou d'un argument.

Avec cet ensemble de 260 règles SIM on obtient, pour EXP-Paris classes de 3^e (90 élèves ayant effectué 4297 transformations), un taux de 91% de succès au diagnostic (lorsqu'il fournit un résultat) se décomposant en 95% sur les transformations correctes (au nombre de 3226) et en 74% sur les transformations erronées (au nombre de 619). Sur EXP-Brésil, les taux pour les transformations correctes se situent entre 90% et 100% ; les taux pour les transformations erronées se situent entre 56% et 93%. Les faibles taux de certaines classes de EXP-Brésil proviennent d'une insuffisante introduction du logiciel APLUSIX, certains élèves introduisant ou supprimant des signes = très souvent.

Le taux de succès n'est pas suffisant pour évaluer le diagnostic, en effet certains diagnostics sont mauvais, cf. figure 14. Le taux de bons diagnostics a été étudié sur quelques classes de troisième et seconde pour les transformations erronées. Il se situe entre 87% et 90% pour les transformations portant sur les équations et inéquations et entre 70% et 75% pour les autres transformations.

Transformation élève : $9-x=12 \rightarrow x=4$
 Diagnostic :
 Transformation : $9-x=12 \rightarrow -x=12-9$ mouvement additif correct de 9
 Transformation : $-x=12-9 \rightarrow -x=4$ Somme erronée
 SOUS-BUT : $-x \rightarrow x$
 Transformation : $-x \rightarrow x$ Perte du signe moins
La situation est obscure, une solution est de produire un échec (il n'est pas nécessaire de tout interpréter), d'avoir un mouvement de 9 qui emporte en même temps le signe – et le garde puis une faute de calcul.

Transformation élève : $9-x=12 \rightarrow x=12+9$
 Diagnostic :
 Transformation : $9-x=12 \rightarrow 9=12+x$ mouvement additif correct de -x
 Transformation : $9=12+x \rightarrow -9+x=12$ mouvement additif erroné de x
 Transformation : $-9+x=12 \rightarrow x=12+9$ mouvement additif correct de -9
Un mouvement de 9 qui emporte en même temps le signe – et le change peut être vu comme une bonne explication.

Figure 14. Deux exemples de mauvais diagnostics sur les équations.

Récemment, des règles de mouvements changeant le signe de parties non en mouvement, comme celle suggérée dans la figure 14, ont été mises en œuvre et testées sur une classe de 4^e. Le taux de bons diagnostics sur les transformations erronées portant sur les équations est passé de 85% à 98%. Cette amélioration se reporte très peu sur les classes supérieures (ce type de mouvement est une erreur de débutants). Ces règles n'ont pas encore été introduites dans la chaîne globale conduisant à la construction de conceptions (cela demande l'ajout de deux nouveaux traits, changement ou non de signe de l'expression de départ, changement ou non de signe de l'expression d'arrivée).

3.5.6 Les résultats de l'algorithme de diagnostic sur les développements et les réductions

Un travail récent a été réalisé sur les développements et les réductions. Ce travail a d'abord été réalisé de façon indépendante de celui présenté en 3.4 pour avoir un regard indépendant sur les mêmes données. Il a aussi été réalisé dans des conditions différentes : alors que le travail de 3.4 s'est fait sur papier, celui-ci (3.5.6) a été fait avec une mise en œuvre des règles conçues au fur et à mesure. Cela a souvent conduit à écrire des règles plus génériques.

Avec cet ensemble de règles produites on obtient, au niveau des transformations erronées, 89% de bons diagnostics pour la classe de 3^e1 de EXP-Paris et de 92% de bons diagnostics pour la classe de 4^e1 de EXP-Paris.

L'annexe 5 contient une comparaison des règles produites par les deux analystes.

3.6 Un treillis de conceptions a priori pour les mouvements dans les équations et inéquations

3.6.1 Problématique

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés aux erreurs des élèves en algèbre, pour les identifier, les expliquer ou apporter des remédiations. Certaines erreurs sont dues au changement de statut des lettres de l'arithmétique à l'algèbre (Booth 1984) et (Kieran 1990). D'ailleurs Kieran (1994) souligne que les difficultés des élèves en algèbre proviennent du fait qu'ils font de l'algèbre une simple *généralisation* de l'arithmétique, alors que l'apprentissage de l'algèbre passe par des ruptures avec l'arithmétique (Chevallard, 1985). "Learning algebra is not merely a question of making explicit what was implicit" (Kieran, 1989). Par exemple, en arithmétique un signe opératoire dans une écriture indique un calcul à effectuer alors qu'en algèbre le signe opératoire reste souvent dans les résultats. Cette rupture est à l'origine de plusieurs erreurs qui ont été identifiées très tôt par les chercheurs (Davis, 1975). Plus récemment, A. Demby (1997) a identifié 7 groupes de procédures de transformations des expressions algébriques chez des élèves de 13 à 15 ans comme : $2x^2 - x - 5x^2 = 4x - x - 25x = 22x$.

La plupart de ces travaux ont accordé un statut particulier à l'erreur. Elle peut être considérée comme une forme de connaissance (Brousseau, 1978) : « l'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausses, ou simplement inadaptée ». L'erreur ne doit pas être étudiée de façon isolée de son contexte et de la notion à laquelle elle peut être rattachée. Les erreurs « sont rattachées à des conceptions de la notion qui peuvent être décrites, repérées et étudiées dans le cadre d'explications intelligibles » (Brousseau, 2001). Ainsi certaines recherches se sont intéressées aux conceptions que les élèves développent vis à vis des expressions algébriques, au statut qu'ils leur donnent. A. Sfard (1991) propose de distinguer deux conceptions pour une expression algébrique : conception structurale où l'expression est conçue comme un objet, et conception opérationnelle où elle est conçue comme un processus. Elle montre que dans le développement cognitif de l'élève, les conceptions opérationnelles précèdent les conceptions structurales et que l'introduction trop précoce d'approches structurales peut freiner le développement des conceptions opérationnelles et conduit au développement de conceptions pseudo-structurales selon lesquelles les élèves conçoivent une expression algébrique privée de sens de manipulations formelles.

Un modèle « de conceptions » est retenu dans plusieurs travaux comme cadre de modélisation des connaissances des élèves sans qu'ils définissent « conception ». Dans quelques travaux en didactique des mathématiques français on trouve souvent une référence à une caractérisation d'une conception donnée par (Artigue, 1991). Une conception est caractérisée par « un triplet :

S : la classe des situations-problèmes qui donnent du sens au concept ;

I : l'ensemble des signifiants associés (images mentales, représentations, expressions symboliques) ;

Φ : les outils (règles d'action, théorèmes-en-acte, algorithmes) dont on dispose pour manipuler le concept ».

Cette caractérisation s'appuie elle-même sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991). Le point de départ de cette théorie est que les conduites des élèves (hésitations, erreurs, décisions...) dans des situations de résolution de problèmes sont structurées par des schèmes. L'auteur définit le « schème » par « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (ibid, p.136). Un schème repose sur :

- un ensemble d'invariants opératoire (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) ;
- des anticipations du but à atteindre ;
- des règles d'actions qui permettent de générer les actions du sujet ;
- des inférences ou des raisonnements qui permettent de calculer les règles d'actions et donc de mettre en œuvre le schème dans chaque situation particulière.

Un théorème-en-acte est un invariant de type proposition, il est tenu être vrai ou faux. « Les concepts se développent dans l'action et sous-tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines d'activité que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence) ; ils peuvent rester implicites ; ils peuvent même être faux » (Vergnaud 2001).

Par exemple⁸, un schème de résolution des équations de degré 1 de la forme $ax+b=c$ repose sur des théorèmes-en-acte comme « on conserve l'égalité en soustrayant b des deux côtés » et des règles d'actions comme « si $a+b=c$ alors $a+b-b=c-b$ ».

Le modèle retenu s'inscrit aussi dans le *modèle des conceptions* « cKç » (Balacheff, 2001, Soury-Lavergne, 2003).

Nous allons dorénavant utiliser l'abréviation TeA pour théorème-en-acte.

Soulignons que chaque TeA a un domaine de validité, c'est-à-dire un ensemble de situations où il donne une réponse correcte. Dans cette approche, une erreur est le résultat de l'application d'un TeA ou d'une règle d'action en dehors de son domaine de validité. Par exemple l'erreur $-2x < 5 \rightarrow x < 5/(-2)$ est l'application d'un TeA que nous nommons "ConservationSens" (cf. paragraphe 3.5.2), qui exprime que l'élève ne change jamais le sens de l'inégalité pour tous les mouvements, en dehors de son domaine de validité. L'application de ce théorème en acte dans son domaine de validité donnerait des réponses correctes comme $2x < 5 \rightarrow x < 5/2$. Nous dirons qu'un TeA est *partiellement correct* lorsqu'il est erroné, avec un domaine de validité non vide et *totalelement erroné* lorsqu'il est erroné, avec un domaine de validité vide.

Dans cette recherche nous proposons de déterminer les conceptions des élèves relatives au « mouvement dans les équations et inéquations de degré 1 ». Nous caractérisons ces conceptions par le triplet :

- S : les équations et inéquations linéaires de degré 1
- I : images mentales et expressions symboliques
- Φ : règles d'action et TeA

Nous chercherons donc à déterminer les règles d'action et TeA modélisant les erreurs des élèves dans la résolution des équations et inéquations de degré 1.

3.6.2 Les conceptions produites

Comme nous l'avons présenté dans la section 3.5, nous interprétons les productions des règles d'étapes par de règles de réécritures. En ce qui concerne les mouvements dans la résolution des équations ou inéquations, ils sont modélisés par la règle unique de mouvement (cf. 3.5.2). Par exemple, la transformation erronée $2x-4 \leq 5 \rightarrow 2x \geq 5-4$ est représentée par un *Mouvement* de -4 de vecteur : (\leq , GaucheDroite, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg, ChangeSens). La règle détaillée correspondante peut être produite à partir du vecteur, c'est : $A+C \leq B \rightarrow A \geq B+C$.

Les actions de l'élève relatives au mouvement d'un argument dans une équation ou inéquation peuvent porter sur trois traits : signe de l'argument dans la position finale, opérateur associé à l'argument dans la position finale et, pour les inéquations, sens de l'inégalité. Nous désignons ces trois traits respectivement par « signe dans mouvement », « sens dans mouvement » et « opérateur dans mouvement ».

Une conception du mouvement d'un argument est caractérisée essentiellement par les invariants opératoires (TeA et règles d'action) relatifs aux traits : «signe dans mouvement, sens dans mouvement et opérateur dans mouvement ». Pour déterminer ces invariants opératoires, nous cherchons des corrélations entre les actions de l'élève et le contexte dans lequel on rencontre cette action de façon stable. Le contexte étant des éléments de la situation où l'élève produit telle ou telle action. Par exemple, il est important de savoir quand est ce qu'un élève change ou non le signe de l'argument dans le mouvement. En effet, l'élève qui change le signe de l'argument uniquement dans le cas où son signe est négatif doit être différencié de l'élève qui change le signe de l'argument

⁸ Tiré de (Vergnaud, 1991, p. 137)

On peut exprimer les invariants opératoires par des règles de la forme si <contexte> alors <action> : il s'agit des règles d'action. Ensuite, par un processus de diagnostic par généralisation du contexte, on construit des TeA.

En résumé, Les conceptions relatives aux mouvements sont caractérisées par les TeA relatifs aux traits signe dans mouvement, sens dans mouvement et opérateur dans mouvement. Ces TeA sont diagnostiqués à partir des règles d'actions qui sont déterminées à partir des corrélations entre contextes et actions.

Description des actions

A chaque trait sont associées les actions suivantes :

Actions associées au Signe

ChangeSigneArg : le signe de l'argument est changé lors du mouvement.

ChangePasSigneArg : le signe de l'argument n'est pas changé.

Actions associées au Sens

ChangePasSens : le sens de l'inégalité n'est pas changé.

ChangeSens : le sens de l'inégalité est changé.

Actions associées à l'Opérateur

Additif : l'argument est additif dans la position finale ($a+x$)

Multiplicatif-Numérateur : l'argument est multiplicatif au numérateur dans la position finale ($a*x$)

Multiplicatif-Dénominateur : l'argument est multiplicatif au dénominateur dans la position finale (x/a)

Ces actions relatives à l'opérateur se déduisent de la position finale de l'argument.

Description des contextes

On spécifie des éléments du contexte pouvant avoir une influence sur les actions. Cette spécification faite par l'observateur repose en partie sur une analyse épistémique et sur les résultats des travaux sur les erreurs des élèves. La difficulté est de trouver un niveau de granularité pertinent pour les interprétations. En effet, plus il est fin plus il permet de mieux rendre compte le contexte mais il risque de ne pas mettre en évidence les régularités entre le contexte et les actions. A contrario, s'il n'a pas beaucoup de trait les régulations constatées risquent de ne pas être discriminantes pour les élèves. Le niveau de granularité est déterminé par un allé retour entre le modèle et les résultats des diagnostics.

Pour le mouvement, nous avons retenu comme éléments du contexte : type de relation, position de l'argument à l'origine, signe de l'argument, nature de l'argument et position relative de l'argument par rapport à la relation. Les valeurs prises par chacun de ces éléments du contexte sont :

Type de relation

Equation : si le mouvement se fait dans une relation ($= \neq$).

Inéquation : si le mouvement se fait dans une relation ($< \leq > \geq$).

Position de l'argument à l'origine

PosOrgArgEstAdd : si la position d'origine de l'argument est additive.

PosOrgArgEstMult-Num : si la position d'origine de l'argument est multiplicative au numérateur.

PosOrgArgEstMult-Deno : si la position d'origine de l'argument est multiplicative au dénominateur.

Les valeurs PosOrgArgEstMult-Num et PosOrgArgEstMult-Deno peuvent être remplacées par une seule valeur PosOrgArgEstMult si on pense que les positions Numérateur et Dénominateur n'ont pas d'influence sur les valeurs de l'action.

Signe de l'argument

SigneArgEstPlus : si le signe syntaxique de l'argument est positif.

SigneArgEstMoins : si le signe syntaxique de l'argument est négatif.

Nature de l'argument

ArgEstEntier : si l'argument est un entier.

ArgEstFraction : si l'argument est sous une forme de fraction rationnelle

ArgEstDécimal : si l'argument est sous une forme d'une écriture décimale

ArgEstRadical : si l'argument contient un radical
Cet élément intervient dans le cas où l'argument est numérique.

Position de l'argument par rapport à la relation

PosOrgArgEstGauche : si la position d'origine de l'argument est à gauche de la relation.

PosOrgArgEstDroite : si la position d'origine de l'argument est à droite de la relation.

Dans le cadre de cette recherche, nous avons fait le choix de négliger les deux éléments suivants du contexte : « Nature de l'argument » et « Position de l'argument relative par rapport à la relation ».

Règles d'actions

Pour chaque trait du mouvement, nous définissons un Vecteur du Comportement Local, que l'on note VCLP(trait), à partir des éléments du contexte qui nous semblent pertinents pour le trait et des actions associées au trait. Le vecteur obtenu permet de déterminer les règles d'actions relatives au trait. Ce vecteur propose un découpage et une réorganisation des faits relevés par un observateur, il s'agit d'un niveau comportemental de la modélisation de l'élève (Wenger 1987, Dillenbourg et Self 1992). Le choix des événements qui doivent être pris en compte pour ce niveau est le résultat des décisions de l'observateur, comme le souligne (Balacheff 1994, p. 26) « la modélisation comportementale exige donc un premier niveau d'interprétation, celui de l'organisation du réel ».

Nous présentons ci-dessous les VCLP(trait) pour les trois traits du mouvement. Ces vecteurs sont décrits par (Nom du vecteur, Eléments du contexte, Actions).

Signe

VCLP(signe) = (VCLP-Signe-X, Type de relation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument, Action sur le signe). On obtient 16 valeurs possibles de ce vecteur dont 8 expriment des règles correctes.

Sens

VCLP(sens) = (VCLP-Sens-X, inéquation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument, Action sur le sens). On obtient 8 valeurs possibles de ce vecteur dont 4 expriment des règles correctes.

Opérateur

VCLP(opérateur) = (VCLP-Opérateur-X, Type de relation, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument, Position finale de l'argument). On obtient 18 valeurs possibles de ce vecteur, dont 6 expriment des règles correctes.

Par exemple, le vecteur (VCLP-Signe-1a equation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg) peut être interprété par la règle d'action : « Si l'argument à déplacer, d'un membre d'une équation à l'autre membre, est en position additive et de signe positif, alors on ne change pas de signe après le mouvement », ou encore « si $a+b=c$ alors $b=c \ominus a$ ou $b=a \ominus c$ où \ominus désigne un opérateur parmi +, *, / ».

Les VCLP sont diagnostiqués quand il y a une corrélation entre le contexte et l'action selon, un mécanisme décrit en 3.6.1.

TeA

Pour chaque trait du mouvement, nous avons défini des TeA globaux C_i , puis des TeA $C_{i-x-y-z}$ sur des domaines plus restreints. x, y et z précisent le contexte parmi les valeurs suivantes :

- type de relation : Eq (pour équation) ou Ineq (pour inéquation) ou vide
- position d'origine de l'argument : Add (pour additif), Mult (pour multiplicatif), Num (pour numérateur) ou Deno (pour dénominateur);
- signe de l'argument : plus ou moins

Ces TeA sont organisés selon une hiérarchie relative au contexte. Si l'on choisit un ordre de restriction des contextes, on peut organiser ces TeA selon une hiérarchie dont les racines sont des TeA globaux, chacun ayant des descendants, comme indiqué sur les treillis des figures 15, 16 et 17.

Nous définissons le niveau de profondeur du contexte par « profondeur 0 » si le TeA diagnostiqué est global (C_i), « profondeur 1 » si le TeA diagnostiqué est (C_{i-x}), « profondeur 2 » s'il est (C_{i-x-y}) et ainsi de suite.

Le niveau le plus profond est déterminé à partir des VCLP diagnostiqués, selon le mécanisme décrit en 3.6.3.1. Ce sont les TeA de niveau le moins profond qui sont attribués à l'élève, car ce sont ceux pour lesquels le contexte est le plus large

Un TeA est correct s'il est diagnostiqué directement à partir des VCLP corrects ou si tous ses descendants sont corrects. Dans ce cas, son domaine de validité est caractérisé par le contexte dans lequel il est défini (cf. les treillis : les TeA sont représentés en jaune).

Dans les autres cas, le domaine de validité du TeA est celui du TeA correct qui est son plus proche descendant.

Par exemple : le TeA « conservation de l'opérateur » (CO), qui consiste à reporter le même opérateur dans l'autre membre, n'est pas correct. Son domaine de validité est le contexte additif.

En terme de conceptions, les TeA sont des composants de la conception « mouvement » de l'élève. Les TeA globaux s'expriment en langue naturelle et sont compréhensibles par l'enseignant. Ce dernier point fait leur force. Les TeA globaux sont les composants principaux, les autres TeA sont seulement des spécialisations des TeA globaux à des contextes.

Les 5 composants principaux (TeA globaux) du trait « Signe dans mouvement »

SigneCorrect : **Traitement correct du signe de l'argument.**
ValeurAbsolue : **Changement du signe de l'argument si et seulement si il est négatif.**
ValeurAbsoluePartielleM : **Changement du signe de l'argument si et seulement si « il est négatif et sa position à l'origine est multiplicative » ou si « sa position à l'origine est additive ».**
ConservationSigne : **Jamais de changement du signe l'argument.**
ChangementSigne : **Toujours changement du signe l'argument.**

Le TeA ValeurAbsoluePartielleM a été construit a posteriori, en observant une corrélation forte entre les TeA ChangementSigne-eq-add et ValeurAbsolue-eq-mult, d'une part, et une corrélation entre les TeA ChangementSigne-ineq-add et ValeurAbsolue-ineq-mult, d'autre part.

On obtient le treillis de la figure 15 comportant 39 TeA, de niveaux de profondeurs 0, 1 ou 2. Chaque théorème en acte de niveau 2 est obtenu à partir de 2 VCLP ou règles d'actions. Par exemple, VA-eq-mult est diagnostiqué si on a VCLP-Signe-3a et VCLP-Signe-4b :

(VCLP-Signe-3a equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg)

(VCLP-Signe-4b equation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangeSigneArg)

qui expriment qu'on conserve le signe de l'argument dans le contexte équation et multiplicatif.

Parmi ces 39 TeA, 15 sont corrects et 16 sont partiellement corrects. Par exemple, le théorème en acte ConservationSigne est correct sur les situations où l'argument à déplacer est en position multiplicative dans les équations. Voir figure 15.

Les 4 composants principaux (TeA globaux) du trait « Sens dans mouvement »

SensCorrect : **Traitement correct du sens de l'inégalité.**
SensUnifié : **Changement du sens de l'inégalité si et seulement si le signe de l'argument est négatif.**
ConservationSens : **Jamais de changement du sens de l'inégalité.**
ChangementSens : **Toujours changement du sens de l'inégalité.**

On obtient un treillis de 10 TeA obtenus à partir de 8 VCLP ou règles d'actions. Parmi ces 10 TeA, 3 sont corrects et 6 sont partiellement corrects. Voir figure 16.

Les 5 composants principaux (TeA globaux) du trait « Opérateur dans mouvement »

OpérateurCorrect : **Traitement correct de l'opérateur.**

OpérateurUnifiéA : **La position finale de l'argument est toujours additive.**

$$(a+x=b \rightarrow x=b\pm a \quad ax=b \rightarrow x=b\pm a \quad x/a=b \rightarrow x=b\pm a)$$

OpérateurUnifiéMN : **La position finale de l'argument est toujours multiplicative au numérateur**

$$(a+x=b \rightarrow x=ab \quad ax=b \rightarrow x=ab \quad x/a=b \rightarrow x=ab)$$

OpérateurUnifiéMD : **La position finale de l'argument est toujours multiplicative au dénominateur**

$$(a+x=b \rightarrow x=b/a \quad ax=b \rightarrow x=b/a \quad x/a=b \rightarrow x=b/a)$$

ConservationOpérateur : **Report de l'opérateur.**

$$(a+x=b \rightarrow x=b\pm a \quad ax=b \rightarrow x=ab \quad x/a=b \rightarrow x=b/a)$$

Contrairement aux deux premiers traits, nous n'avons le schéma qui permet d'obtenir le théorème en-acte le plus profond à partir de deux VCLP. En effet, pour les deux premiers traits l'élément du contexte "signe de l'argument à l'origine" joue un rôle important pour discriminer les actions (cf. l'exemple ci-dessus sur la détermination de VA-eq-mult).

Pour le trait « Opérateur dans mouvement » nous avons réinterprété les VCLP à l'aide du nom d'un TeA global et du contexte. Ce premier niveau constitue donc des règles d'actions.

On obtient un treillis de 35 TeA obtenus à partir de 18 règles d'actions qui sont des interprétations de 18 VCLP. Parmi ces 35 TeA, 9 sont corrects et 16 sont partiellement corrects. Voir figure 17.

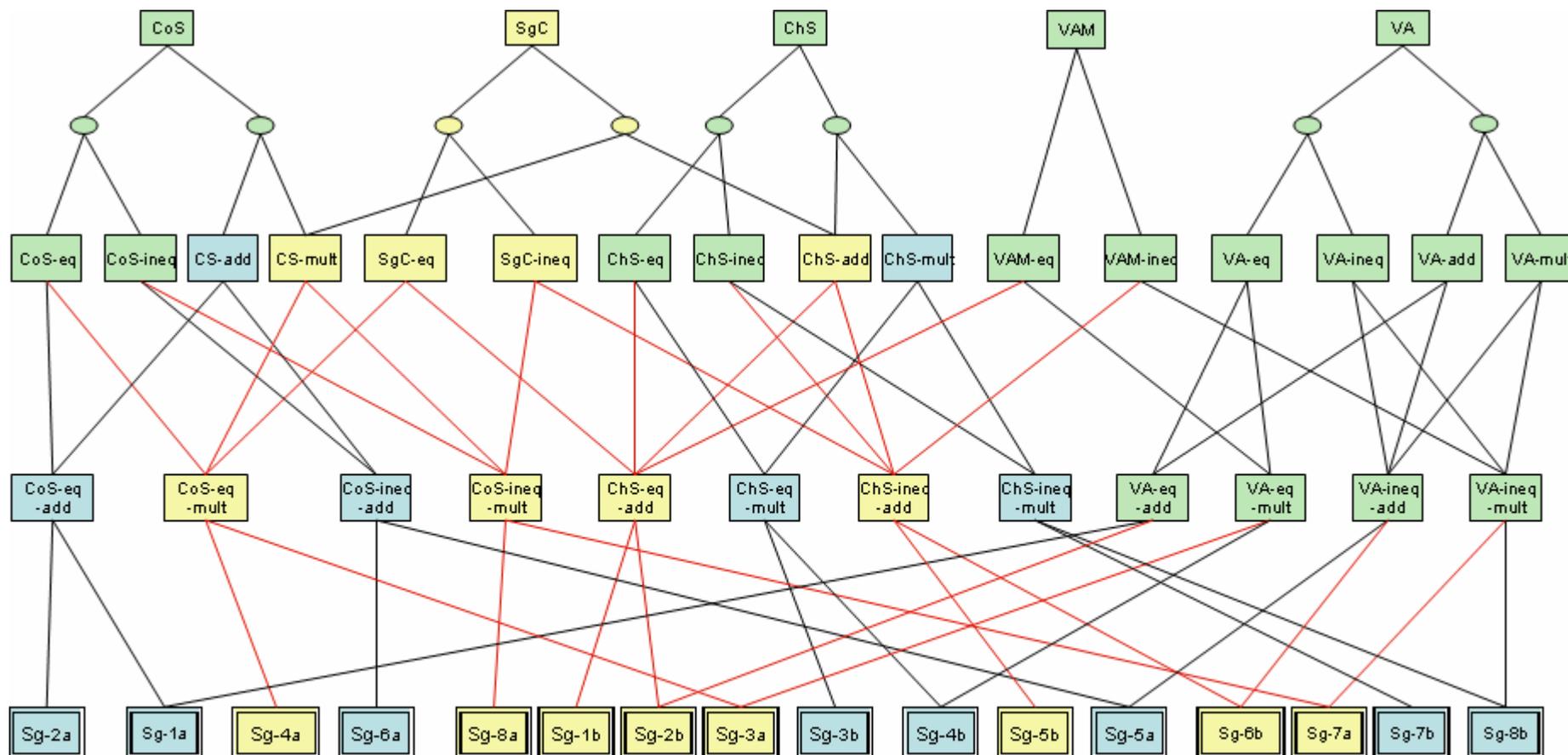


Figure 15. Treillis des théorèmes-en-acte du trait « Signe dans mouvement »

Théorème-en-acte Correct Partiellement correct Totalement erroné Règle d'action

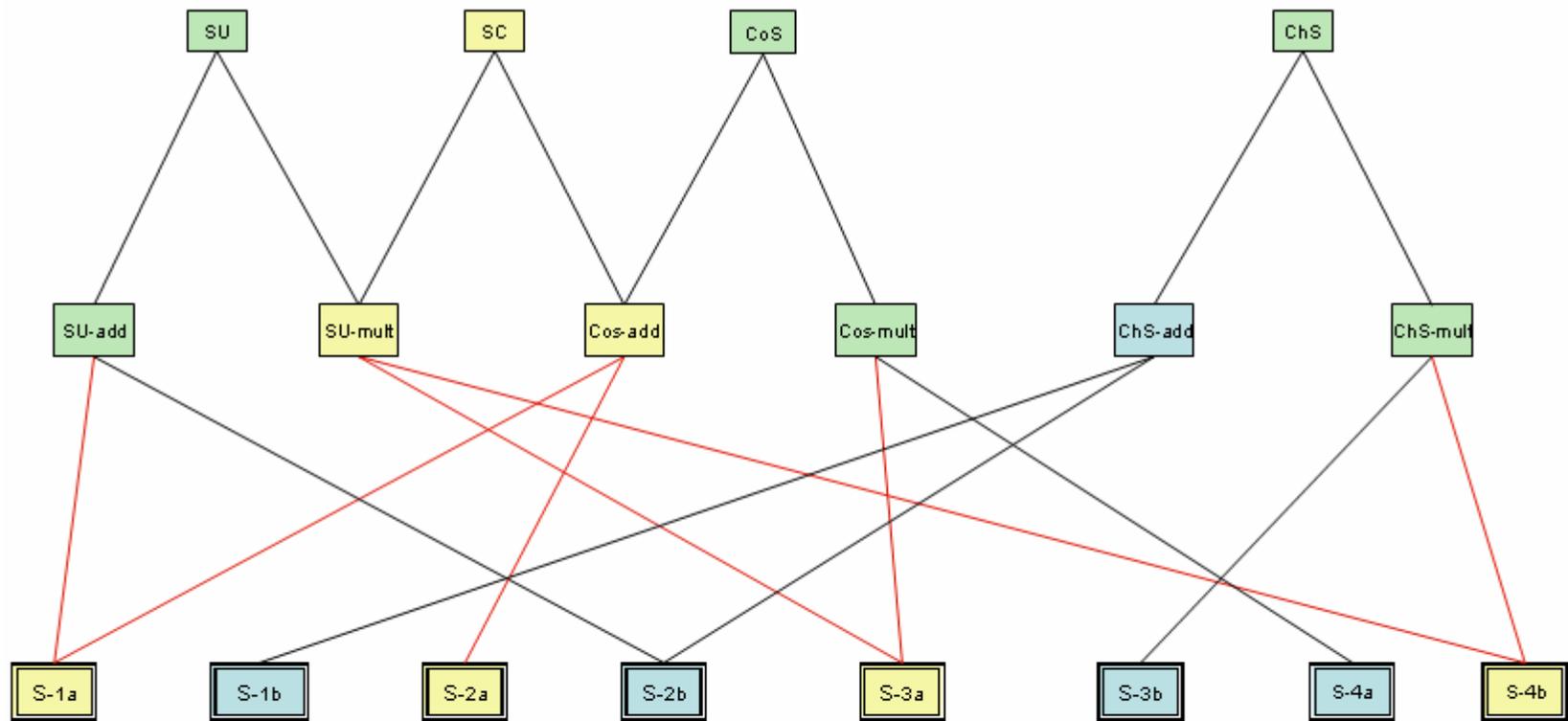
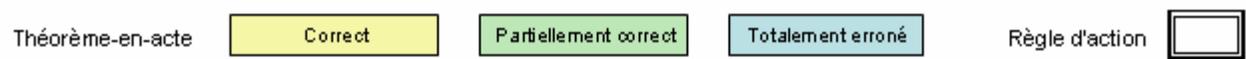


Figure 16. Treillis des théorèmes-en-acte du trait « Sens dans mouvement »



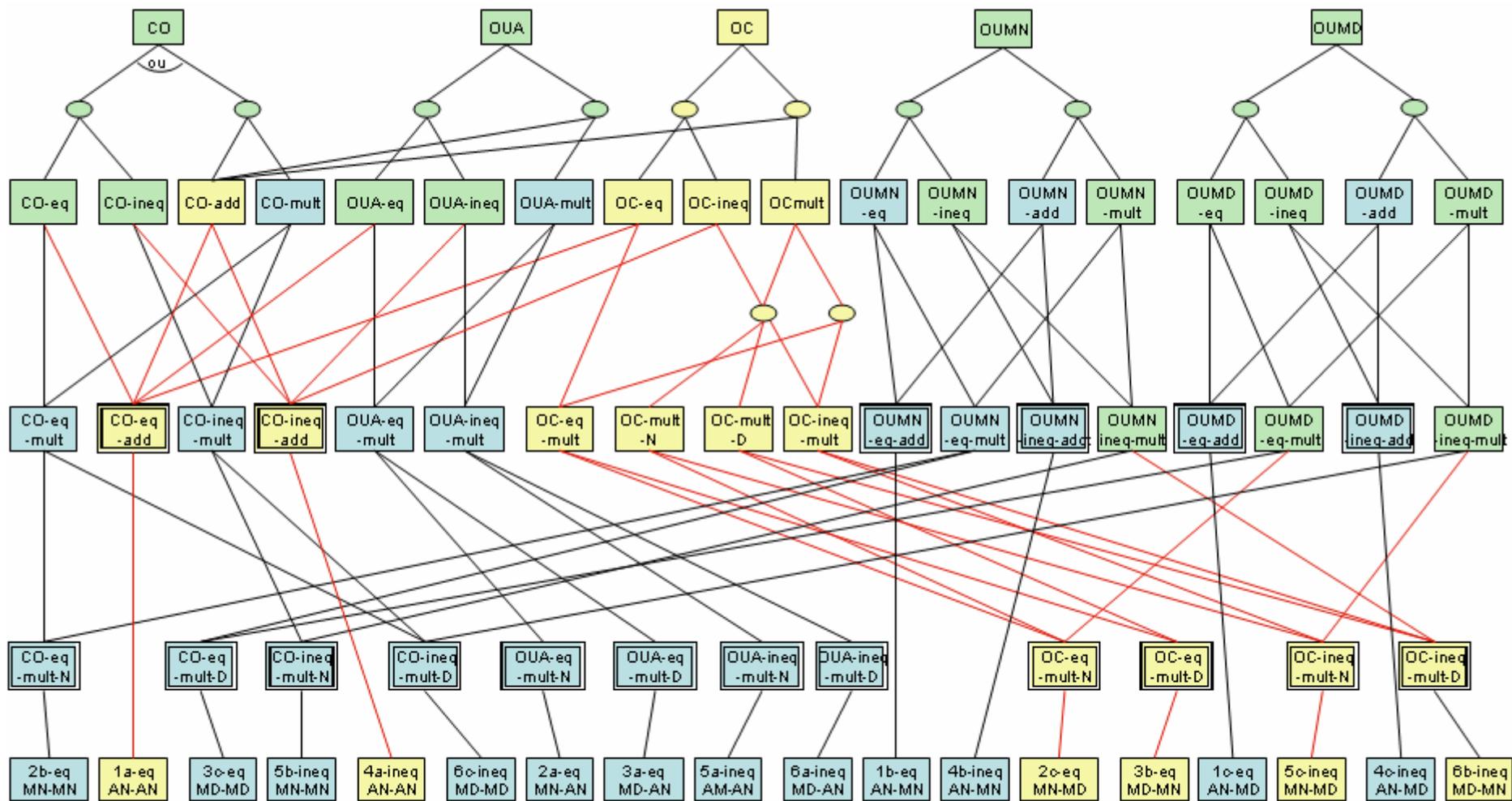


Figure 17. Treillis des théorèmes-en-acte du trait « Opérateur dans mouvement »

Théorème-en-acte Correct Partiellement correct Totalement erroné Règle d'action

3.6.3 Le diagnostic global avec des conceptions a priori

3.6.3.1 Mise en œuvre

La mise en œuvre a été effectuée dans le langage SIM qui permet, outre les règles, de représenter des objets et de les organiser dans des hiérarchies.

Les VCLP sont représentés comme des objets SIM avec un nom, une classe et des traits. Par exemple, le VCLP présenté en 3.6.2 (Règles d'actions) est représenté comme un objet de nom VCLP-Signe-1a, de classe VCLP-SigneMoveDansEquationAdd et de traits (equation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstPlus ChangePasSigneArg). Chaque valeur possible des traits (equation, PosOrgArgEstAdd, etc.) est calculée, pour une instance donnée d'une règle de mouvement, par une fonction qui a été écrite en Delphi⁹.

Le calcul des VCLP se fait de la façon suivante. On part d'une liste de règles fournie par le diagnostic local, on apparie chaque règle de mouvement à chaque VCLP et on compte les nombres d'occurrences. Ensuite, on étudie les VCLP ayant les mêmes contextes. Ils se regroupent pour la plupart par deux correspondant à deux actions possibles comme ChangeSigneArg / ChangePasSigneArg. Le mécanisme d'élection d'un VCLP, pour une paire de VCLP de même contexte, est le suivant :

Soit n_1 et n_2 les nombres d'occurrences respectifs de VCLP1 et VCLP2 pour un élève donné :

SI $n_1+n_2 = 0$ ALORS aucun VCLP n'est élu

SINON SI $n_1 / (n_1+n_2) \geq 2/3$ ALORS VCLP1 est élu avec le coefficient $n_1 / (n_1+n_2)$

SINON SI $n_2 / (n_1+n_2) \geq 2/3$ ALORS VCLP2 est élu avec le coefficient $n_2 / (n_1+n_2)$

SINON aucun VCLP n'est élu.

Quand un VCLP est élu avec $n_1+n_2=1$, le coefficient est multiplié par $2/3$ pour donner moins de poids aux situations ayant une seule occurrence.

Les TeA ont été représentés comme des objets SIM organisés en hiérarchies correspondant aux figures 15, 16 et 17.

Le passage des VCLP aux TeA est effectué par des règles comme :

SI VCLP-Signe-1a ET VCLP-Signe-2B ALORS ValeurAbsolue-eq-add

qui sont représentées dans le langage SIM. Un coefficient est associé aux TeA se trouvant en conclusion de ces règles. Il est calculé comme la moyenne géométrique des coefficients des VCLP. Cette moyenne géométrique \sqrt{ab} a l'avantage d'être nulle quand $a=0$ ou $b=0$ et de façon plus générale, d'être plus proche du coefficient le plus petit. Un coefficient nul signifie « non élection ».

Lorsque le passage des VCLP aux TeA est réalisé, une propagation des coefficients est effectuée dans les hiérarchies de TeA en utilisant encore la moyenne géométrique.

Les TeA qui sont produits comme résultats du processus sont ceux qui ont le contexte le plus large, c'est-à-dire qui sont les plus haut dans la hiérarchie. En d'autres termes, si un TeA T1 est élu et si son père T2 est aussi élu, T1 n'est pas présenté comme résultat car il est inclus dans T2.

⁹ Delphi est l'environnement de développement dans lequel sont développés APLUSIX et ANAÏS.

Les coefficients associés aux VCLP et aux TeA sont des formes de facteurs de certitude (Buchanan & Shortliffe, 1984).

3.6.3.2 Les résultats obtenus

Nous avons diagnostiqué les conceptions des expérimentations décrites dans le paragraphe 3.3. Elles concernaient 3186 élèves, dont 2503 élèves brésiliens et 683 élèves français. Les résultats sont décrits en annexe 6.

3.6.3.2.1 Analyse globale

Nous avons diagnostiqué 7013 TeA, dont 87% sont corrects, 12% partiellement corrects et 1% totalement incorrect. Cela confirme le constat selon lequel les TeA sont souvent partiellement corrects.

Thèmes-en-acte diagnostiqués auprès de 3186 élèves		% E	% C	Nbre
SigneCorrect		8,1	2,7	258
ConservationSens		6,5	2,2	206
ChangementSigne		0	0	1
	SigneCorrect-eq	15,7	5,3	500
	SigneCorrect-ineq	3,7	1,3	119
	ChangementSigne-add	22,8	7,6	726
	ConservationSigne-mult	0,6	0,2	18
	ConservationOperateur-add	56,8	19	1810
	ConservationSens-add	30,3	10,2	966
	ValeurAbsolue-eq	0	0	1
	ValeurAbsolue-add	0,1	0	3
	ValeurAbsolue-mult	0,6	0,2	20
	ValeurAbsoluePartielleM-eq	4,2	1,4	134
	ConservationSigne-add	0,3	0,1	8
	ChangementSigne-eq	0,2	0,1	7
	ChangementSigne-ineq	0	0	1
	ConservationSens-mult	0,8	0,3	24
	ChangementSens-mult	0,2	0,1	6
	ConservationSens-mult	0,1	0	2
	ChangementSigne-eq-add	21,3	7,1	679
	ChangementSigne-ineq-add	4,8	1,6	153
	ConservationSigne-eq-mult	2,5	0,8	79
	ConservationSigne-ineq-mult	0,2	0,1	7
	OperateurCorrect-mult-num	33,1	11,1	1056
	ValeurAbsolue-eq-add	1,9	0,6	61
	ValeurAbsolue-ineq-add	1,8	0,6	56
	ValeurAbsolue-eq-mult	0,5	0,2	17
	ValeurAbsolue-ineq-mult	1,9	0,6	61
	ConservationSigne-eq-add	0,5	0,2	16
	ConservationSigne-ineq-add	0,6	0,2	18
TOTAL				7013

Tableau 7. Répartition des TeA relatifs au « Mouvement » par niveau de profondeur du contexte. %E désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total d'élèves, %C désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total de TeA. En gras les TeA corrects, en noir grasse normale, les TeA partiellement corrects et en rouge les TeA totalement erronés.

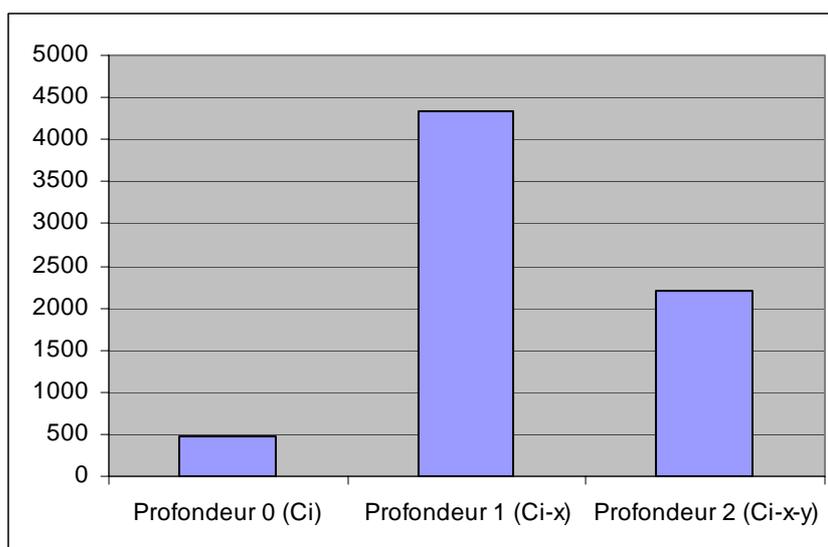


Figure 18. Partition des TeA en fonction des profondeurs du contexte.

Seul un TeA global correct est diagnostiqué pour environ 8% des élèves : SigneCorrect. Cela nous invite à relativiser le taux de réussite des élèves. D'une part, 80% des TeA sont du niveau de profondeur 1 ou 2 (cf. figure 18). D'autre part, 61,3% des TeA corrects concernent le contexte équation et 66,9% des TeA corrects concernent le contexte additif (cf. Tableau 8).

Contexte	Type de relation		Position de l'argument	
	Equation	Inéquation	Additif	Multiplicatif
Pourcentage	61,3	38,7	66,9	23,1

Tableau 8. Pourcentage relatif au type de contexte.

Le peu de résultats obtenus sur les contextes multiplicatifs et inéquations atteste de l'existence des difficultés que peuvent avoir les élèves. Cela est confirmé par le nombre faible de TeA diagnostiqués relatifs au Sens dans Mouvement, ils représentent 12,7% de l'ensemble des TeA diagnostiqués.

L'extrait ci-dessous est assez représentatif des diagnostics des VCLP sur « Sens dans Mouvement ». Il montre que, dans le cas du contexte additif, nous avons une stabilité du comportement (VCLP-sens-1a et VCLP-sens-1b). En revanche, il y a peu de résultats avec une instabilité de comportements dans le cas du contexte multiplicatif. Ainsi, dans le cas du mouvement multiplicatif dans une inéquation d'un argument dont le signe est plus, il change de sens une fois (VCLP-sens-3b) et ne change pas de sens une fois (VCLP-sens-3a).

VCLP-sens-1a : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstPlus ChangePasSens 9 (COEF : 1)
VCLP-sens-2a : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstAdd SigneArgEstMoins ChangePasSens 5 (COEF : 1)
VCLP-sens-3a : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangePasSens 2
VCLP-sens-3b : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstMult SigneArgEstPlus ChangeSens 1
VCLP-sens-4a : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangePasSens 1
VCLP-sens-4b : MoveDansRelation inequation PosOrgArgEstMult SigneArgEstMoins ChangeSens 1

Figure 19. Extrait du diagnostic de « Aristede-Berges Seconde 9019 Eleve23 »

3.6.3.2.2 Analyse des TeA relatifs au trait « Signe dans Mouvement »

La répartition de l'ensemble des TeA relatifs au « Signe dans le mouvement » est donnée par le tableau 9.

TeA diagnostiqués auprès de 3186 élèves		% E	% C	Nbre
SigneCorrect		8.1	8.8	258
	SigneCorrect-eq	15.7	17.0	500
	SigneCorrect-ineq	3.7	4.0	119
	ChangementSigne-add	22.8	24.7	726
	ConservationSigne-mult	0.6	0.6	18
	ValeurAbsolue-eq	0.0	0.0	1
	ValeurAbsolue-add	0.1	0.1	3
	ValeurAbsolue-mult	0.6	0.7	20
	ValeurAbsoluePartielleM-eq	4.2	4.6	134
	ConservationSigne-add	0.3	0.3	8
	ChangementSigne-eq	0.2	0.2	7
	ChangementSigne-ineq	0.0	0.0	1
	ChangementSigne-eq-add	21.3	23.1	679
	ChangementSigne-ineq-add	4.8	5.2	153
	ConservationSigne-eq-mult	2.5	2.7	79
	ConservationSigne-ineq-mult	0.2	0.2	7
	ValeurAbsolue-eq-add	1.9	2.1	61
	ValeurAbsolue-ineq-add	1.8	1.9	56
	ValeurAbsolue-eq-mult	0.5	0.6	17
	ValeurAbsolue-ineq-mult	1.9	2.1	61
	ConservationSigne-eq-add	0.5	0.5	16
	ConservationSigne-ineq-add	0.6	0.6	18

Tableau 9. Répartition des TeA relatifs au « Signe dans Mouvement » par niveau de profondeur du contexte. %E désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total d'élèves, %C désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total de TeA. En gras les TeA corrects, en noir grasse normale, les TeA partiellement corrects et en rouge les TeA totalement erronés.

TeA erronés

Nous constatons que 13,7% des TeA sont erronés et ils concernent essentiellement les contextes Multiplicatif et / ou Inéquation. De plus, ils sont presque tous partiellement corrects.

- Le TeA erroné ValeurAbsoluePartielleM-eq a été diagnostiqué chez 4.2% des élèves. En France, ce TeA est diagnostiqué essentiellement en classe de quatrième chez 21,3% des élèves, et il est quasi absent dans les classes supérieures. Au Brésil, il a été diagnostiqué chez 4.5% d'élèves de la classe 8^e.

- Les TeA ValeurAbsolue-contexte ont été diagnostiqués chez 6.9% des élèves. Il s'agit de changer le signe de l'argument dans le mouvement quand il est négatif. En France, ce TeA est diagnostiqué essentiellement en classe de quatrième chez 7.9% des élèves, et il est quasi absent dans les classes supérieures. Au Brésil, il a été diagnostiqué chez 8.1% d'élèves de la classe 8^e. Soulignons que la majorité de ces TeA sont au niveau de profondeur 2 du contexte.

Evolution des TeA des élèves français

L'évolution des TeA des élèves entre les niveaux 4^e, 3^e et 2nd est importante.

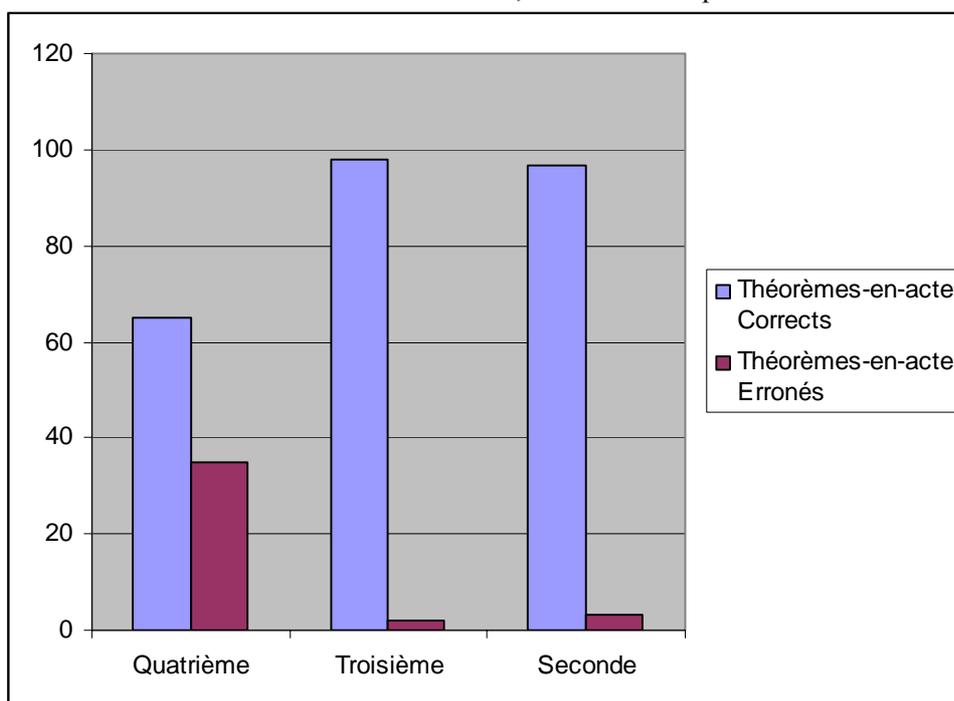


Figure 20. Evolution des TeA des élèves français en pourcentage

Comme le montre la figure 20, entre la classe de quatrième et la classe seconde, le nombre d'élèves ayant un TeA erroné diminue en passant de 35% à 3% et le nombre d'élèves ayant un TeA correct augmente en passant de 65% à 97%. Cependant, si on examine l'évolution des TeA corrects entre ces deux niveaux (cf. tableau 10), on constate qu'en classe de seconde les TeA corrects diagnostiqués sont plus dispersés par rapport au contexte que ceux de la classe de quatrième. En effet, le TeA SigneCorrecte de niveau de profondeur 0 passe de 28.1% à 17,7% et les TeA corrects de niveau de profondeur 1 passent de 0 à 10% (pour SigneCorrect-eq), 6.2% (pour SigneCorrect-ineq) et 22.4% (pour Conservation-signe-mult). De même, on a plus de dispersion des TeA corrects de niveau de profondeur 3 en classe de seconde qu'en classe de quatrième.

Ces résultats montrent que l'évolution des TeA corrects entre la classe de quatrième et seconde est accompagnée des dispersions des TeA corrects au niveau des contextes additif et équation.

3.6.3.2.3 Analyse des TeA relatifs au trait « Sens dans Mouvement »

Un peu moins d'un tiers des élèves ont un TeA correct sur le sens de l'inégalité dans le mouvement et qui est dans le contexte additif. Un autre résultat est que 6,5% des élèves conservent le sens de l'inégalité quelque que soit le type de mouvement.

TeA diagnostiqués auprès de 3186 élèves	% E	% C	Nbre
ConservationSens	6.5	17.1	206
ConservationSens-add	30.3	80.4	966
ConservationSens-mult	0.8	2.0	24
ChangementSens-mult	0.2	0.5	6
Total			1202

Tableau 10. Répartition des TeA relatifs au « Sens dans Mouvement » par niveau de profondeur du contexte. %E désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total d'élèves, %C désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total de TeA.

3.6.3.2.4 Analyse des TeA relatifs au trait « Opérateur dans Mouvement »

Comme le montre le tableau 11, peu de TeA erronés ont été diagnostiqués. Cependant, tous les TeA diagnostiqués sont de niveau de profondeur 1, 2 ou 3. Ils correspondent dans leur majorité aux contextes Equation et / ou Additif.

TeA diagnostiqués auprès de 3186 élèves		% E	% C	Total
ConservationOpérateur-add		56,8	45,2	1810
	ConservationOpérateur-eq-add	33,1	26,4	1056
	ConservationOpérateur-ineq-add	2,4	1,9	78
	OpérateurCorrect-mult-num	33,1	26,4	1056
	OpérateurUnifiéMD-eq-add	0,1	0,0	2
	OpérateurUnifiéMD-ineq-add	0,0	0,0	1
Total				4003

Tableau 11. Répartition des TeA relatifs au trait Opérateur dans Mouvement par niveau de profondeur du contexte. %E désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total d'élèves, %C désigne le pourcentage des TeA par rapport au nombre total de TeA. En gras les TeA corrects.

On constate que le contexte multiplicatif au dénominateur n'a pas été diagnostiqué, ce qui peut expliquer l'absence des TeA relatifs au contexte multiplicatif. Cela est dû à au moins deux raisons. La première est qu'on a proposé peu d'exercices avec les fractions et la deuxième est que le diagnostic des règles sur les fractions n'est pas complet.

3.6.3.2.5 Comparaison des TeA diagnostiqués chez les élèves brésiliens et français

Par rapport au curriculum de l'enseignement de l'algèbre, le niveau 8^e du Brésil correspond au niveau de Seconde en France. Les résultats des conceptions de ces deux niveaux sont donnés par les histogrammes suivants. Nous avons pris en compte le critère correcte/erronée des conceptions et le niveau de profondeur.

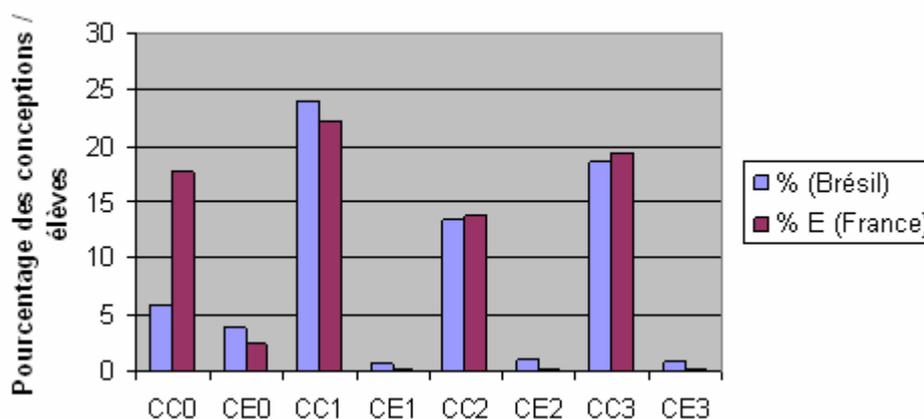


Figure 21. CCi représente le pourcentage des élèves ayant des TeA corrects de niveau de profondeur i. CEi représente le pourcentage des élèves ayant des TeA erronés de niveau de profondeur i.

Il ressort de ces résultats les comparaisons suivantes :

- les TeA erronés sont légèrement plus nombreux chez les élèves brésiliens
- les TeA corrects CC0 sont nettement plus nombreux chez les élèves français. En fait, il s'agit que d'un seul TeA SigneCorrect qui a été diagnostiqué chez 17,7% des élèves français et seulement chez 5,9% des élèves Brésiliens.
- Pour les autres TeA corrects CC1, CC2 et CC3, les résultats sont comparables.

Pour affiner la comparaison de ces deux populations, il serait important de faire une analyse des deux systèmes d'enseignement.

3.7 La production de conceptions par classification automatique

3.7.1 Problématique

L'application de techniques d'apprentissage automatique (machine learning) au problème de la modélisation d'élèves est une problématique classique des EIAH. Sison et Shimura (1998) font un compte rendu des recherches dans ce domaine pluridisciplinaire. La plupart des approches existantes sont supervisées, basées sur de l'induction symbolique du modèle de l'élève : BUGGY (Brown & Burton, 1978), ASSERT (Baffes & Mooney, 1996), ACM (Langley & Ohlsson, 1984)). Certains systèmes ont appliqué des techniques non supervisées afin d'étendre automatiquement les bibliothèques de règles erronées (bugs) à partir des fichiers .log des activités de l'élève. Parmi ces derniers, on trouve PIXIE (Sleeman, 1987) pour l'algèbre, ou MEDD (Sison et al., 2000) pour l'enseignement du langage Prolog. Ces approches ont un niveau assez élémentaire représentation du domaine (comme PIXIE, qui analyse les expressions algébriques avec des algorithmes basés sur la syntaxe) ou se concentrent sur des domaines spécifiques (comme en MEDD, où la nature propositionnelle du langage Prolog permet l'utilisation d'algorithmes de classification conceptuelle basés sur des considérations sémantiques).

L'approche utilisée dans ce projet, basée sur une classification (clustering) non supervisée des étapes de résolution d'exercices par les élèves, est originale. L'inférence des connaissances mises en œuvre par les élèves, à partir de l'observation de leurs productions (que nous appliquons à une tâche spécifique : le mouvement d'arguments dans des équations et inéquations du premier ordre), est une nouvelle approche pour la modélisation procédurale. ACM (Langley & Ohlsson, 1984) a considéré ce problème dans le domaine de l'arithmétique, plus précisément sur la soustraction, mais l'algèbre, avec la multiplicité de chemins de résolution possibles, présente des difficultés d'un autre niveau. La complexité du domaine pose de nouveaux défis. Nous abordons la modélisation de l'élève sous deux axes : d'une part nous considérons les productions d'ensembles d'élèves (par classe de niveau) pour les regrouper en clusters prototypiques (classification non supervisée) : les élèves d'un même cluster possèdent des caractéristiques similaires. Suivant le type de descripteurs utilisés, ces caractéristiques peuvent être de nature différente (type d'interaction avec APLUSIX si les descripteurs concernent les temps et les frappes de touches, type de règles employées pour résoudre les exercices si les descripteurs sont les successions de règles ANAïs appliquées, types de conceptions si les descripteurs sont des descripteurs de contexte et action décrits au paragraphe 3.6.2, etc). L'autre axe, qui s'est avéré plus significatif du point de vue didactique, est l'analyse des productions d'élèves individuellement, utilisant les descripteurs de contexte et action d'un grand nombre transformations produites par un même élève sur plusieurs exercices. Ce dernier axe, que nous abordons avec des techniques adaptées d'apprentissage symbolique (espace des versions) a donné des résultats cohérents avec ceux des analyses manuelles citées précédemment. Cela démontre qu'il est envisageable d'obtenir des modèles empiriques d'élèves de manière automatique. Une poursuite de ces recherches est nécessaire si l'on veut placer ces modèle empiriques de l'élève dans un cadre théorique de conceptions (Artigue, 1991 ; Soury-Lavergne & Balacheff, 2003).

Plus particulièrement, l'approche de l'apprentissage « machine » (par opposition à l'apprentissage humain), qui a été mise en œuvre dans ce projet, vise à caractériser les conceptions algébriques des élèves, correctes ou erronées, à partir de l'analyse automatique de leurs interactions avec le logiciel APLUSIX. L'équipe Apprentissage du laboratoire Leibniz a abordé le traitement des données produites par les élèves sur deux aspects complémentaires.

- D'une part, nous avons étudié les données « brutes » issues des protocoles (durée des actions, temps de résolution, nombre d'actions, frappes de touches, déplacements de la souris, etc.) afin de caractériser les différents modes d'interaction homme-machine. Pour cela nous avons utilisé des algorithmes de classification (ou « clustering ») qui sont capables de regrouper les utilisateurs du logiciel en catégories, ou classes distinctes, à partir de leurs caractéristiques.
- D'autre part, nous avons étudié les productions des élèves à partir de la description de haut niveau produite par ANAÏS (les données complétées), dans le but de produire des conceptions de manière automatique, sans avoir à fournir des conceptions a priori. En effet, un intérêt des méthodes automatiques réside dans le fait qu'elles sont capables de découvrir les paramètres pertinents et surtout qu'elles apportent une méthodologie « générique » susceptible d'être réutilisée dans d'autres parties du problème que l'étude des « mouvements ».

Dans la suite de ce rapport, nous décrivons les deux approches que nous avons utilisées, par *classification* et par *modélisation* pour étudier les données et nous présentons les résultats obtenus. Une présentation plus complète se trouve dans le mémoire de thèse de Renaudie (2005).

3.7.2 Approche par classification

Les données sur lesquelles nous avons travaillé sont les informations contenues dans les enregistrements des protocoles d'élèves des expérimentations EXP92, EXP93 et EXP-Annemasse. Soulignons que nous sommes en train de travailler sur les données de EXP-Brésil, mais que ce travail est effectué « hors ACI ». Dans l'approche par classification, nous avons considéré les données « brutes » recueillies pendant l'utilisation d'APLUSIX, composées des champs présentés en figure 6, ainsi que des données complétées constituées de champs calculés par ANAÏS à partir des données brutes. Ces données ont été étudiées à l'aide d'outils de « clustering » (ou classification automatique).

3.7.2.1 La classification des élèves à partir de statistiques sur leurs actions

Afin d'étudier les actions effectuées par les élèves, nous avons réalisé l'analyse des données avec des outils de classification (ou « clustering ») qui correspondent à des méthodes d'apprentissage non supervisé. Ces méthodes permettent de structurer les données en groupes (on parle aussi de « clusters ») cohérents et contrastés et donc de faire apparaître des régularités au sein d'un ensemble de données (ici la description des comportements d'élèves). Dans ce projet, après la comparaison de différentes approches (k-means, classification ascendante...) nous avons finalement retenu l'algorithme « Super Paramagnetic Clustering » : SPC (Blatt et al. 1997) qui présente l'avantage de ne faire aucune supposition sur la forme des clusters. Cet algorithme

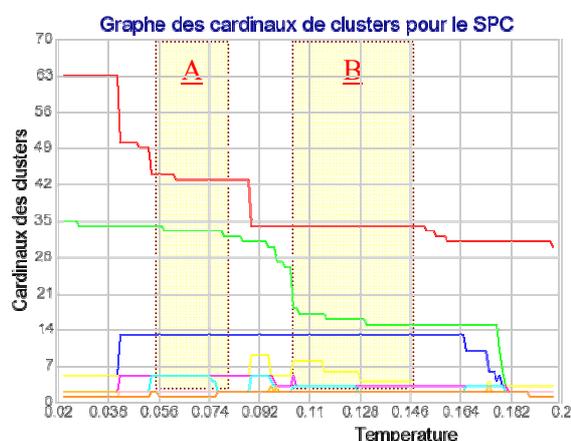


Figure 22. Courbe de cardinaux obtenue pour l'exercice 165, entre $T_{min} = 0$ et $T_{max} = 0.2$.

produit une hiérarchie de clusters (ce qui permet de travailler à des degrés de granularité variables) contrôlée par un paramètre appelé « température ». La figure 22 montre le résultat d'une classification effectuée par la méthode SPC. L'axe des abscisses représente le paramètre de contrôle, et celui des ordonnées le cardinal de chaque classe. Les courbes de couleur correspondent au cardinal de chaque cluster (une courbe par cluster). A $T=0$ toutes les données sont placées dans le même cluster, et à mesure que T augmente les clusters éclatent pour donner lieu à plusieurs clusters plus petits, contenant des données plus semblables entre elles. La longueur des paliers est une bonne indication de la « robustesse » d'un cluster. Nous avons affecté (manuellement) une "étiquette" à chaque cluster, à partir d'une analyse des descripteurs des élèves appartenant à ce cluster, à des fins d'interprétation. En effet, les algorithmes de clustering regroupent des ensembles de points par similarité dans l'espace des descripteurs, mais n'attribuent pas de sens à chaque cluster. Le sens de la classification ne peut être compris que si l'on analyse les caractéristiques des individus qui composent chaque cluster. Les caractéristiques de ces groupements sont ensuite utilisables avec de nouveaux élèves, afin de déterminer à quels groupes préexistants ils se rattachent le mieux.

En nous plaçant au niveau de granularité de l'exercice, et en représentant chaque élève par des attributs numériques qui caractérisent son comportement de manière « macroscopique », nous avons cherché à identifier des groupes d'élèves ayant le même comportement d'un point de vue « quantitatif ». Nous nous sommes appuyés sur la base de données développée par (Pellegrino 2005) qui regroupe une partie des protocoles recueillis lors des expérimentations et qui permet d'effectuer des extractions de données en utilisant des requêtes SQL. Le tableau 12 montre les attributs retenus dans cette partie pour la représentation du comportement de l'élève. Bien évidemment, les données ne sont pas utilisées directement, nous avons procédé à une normalisation classique en analyse de données : le *centrage-réduction*.

Attribut	Description de l'attribut	Nature
X_1	Temps total mis par l'élève sur l'exercice (en secondes)	réel
X_2	Exercice résolu ou pas. Lorsque l'élève passe à l'exercice suivant, on considère qu'il a fini l'exercice et « rendu sa copie ». La séquence de transformations d'étapes finale est alors automatiquement analysée et, si elle ne comporte aucune erreur et si l'objectif de l'exercice est atteint, alors ce booléen vaut 1.	booléen
X_3	Longueur de la production, i.e., nombre de transformations d'étape.	naturel
X_4	Nombre de transformations d'étape équivalentes.	naturel
X_5	Nombre de transformations d'étape non équivalentes.	naturel
X_6	Taux de transformations d'étape équivalentes, i.e., X_4/X_3	réel
X_7	Temps moyen par transformation d'étape, i.e., X_1/X_3	réel
X_8	Nombre total de microactions.	naturel
X_9	Nombre de microactions modifiantes, i.e., autres que <i>placer-Curseur</i> , <i>Haut</i> , <i>Bas</i> , <i>Gauche</i> , <i>Droite</i> , <i>Selection</i> .	naturel
X_{10}	Taux de microactions modifiantes, i.e., X_9/X_8	réel
X_{11}	Temps moyen par microaction, i.e., X_1/X_8	réel

Tableau 12. Attributs utilisés pour représenter les élèves

Ce travail a été principalement effectué sur les données de EXP93, en ne retenant qu'un seul exercice pour chaque catégorie de problème (réduire, calculer, inégalité, degré de l'expression...). Cet exercice a été choisi sur les bases suivantes : tout d'abord, il ne devait pas être trop simple, afin d'éviter une trop grande homogénéité dans les productions d'élèves et, d'autre part, il devait avoir été traité par un nombre d'élèves le plus élevé possible, afin que la classification effectuée soit statistiquement pertinente. Le tableau 13 fournit la liste des 8 exercices retenus.

ID	Énoncé	Nombre d'élèves l'ayant traité	Taux de réussite
159	Réduire $3x+1-2x+4$	135	97% ¹⁰
160	Calculer $1/2+5/3*(3/2+6)$	135	79%
165	Résoudre $3-2x = 3x-6$	124	57%
170	Résoudre $3x-8 < 2-2x$	94	62%
172	Résoudre $(2x+1)(x-3)+(-x+3)(2x-3) = 0$	81	28%
185	Résoudre $(x+1)(x-5) > (x-3)(x+7)$	42	67%
191	Factoriser $36x^2-84x+49$	28	78%
230	Développer-réduire $(4x+1)(x-2)-(3x+5)^2$	55	78%

Tableau 13. Liste des exemples retenus pour effectuer les analyses statistiques.

Nous avons appliqué une méthodologie d'analyse par classification automatique basée sur l'utilisation de l'algorithme du SPC. Les classifications obtenues ont été analysées à plusieurs niveaux de détail (températures). Les partitions obtenues diffèrent d'un jeu de données à l'autre et mettent en lumière certaines caractéristiques inhérentes à l'exercice à travers le traitement qu'en ont fait les élèves. Ces résultats peuvent être utiles du point de vue didactique et constituent un résultat intéressant pour un professeur. Par une analyse manuelle, quelques caractéristiques communes à ces différentes partitions ont pu être détectées. Une interprétation selon une typologie inspirée de (Trouche, 1996) conduit à une classification globale, inter-exercices, des comportements réels des élèves (Figure 23). Les élèves de type « synthétiques » effectuent plusieurs opérations en une seule transformation, ce qui leur permet de proposer une résolution de l'exercice rapidement. Au contraire, les « décomposeurs » ont tendance à séparer leur démarche en éléments de raisonnement matérialisés par un plus grand nombre d'étapes APLUSIX. Par ailleurs, les élèves « peu à l'aise avec l'interface » ont tendance à effectuer beaucoup de microactions pour éditer les expressions mathématiques, alors que les « hyperactifs » effectuent majoritairement des déplacements du curseur et de la souris.

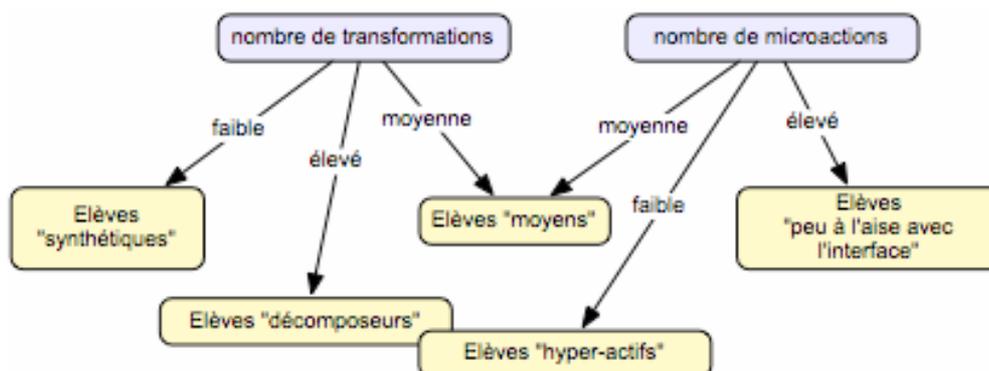


Figure 23. Schéma synthétique des tendances communes aux classifications d'élèves issues d'une représentation par vecteur de statistiques.

Toutefois, comme le montre la figure 24, les élèves présentant ces *tendances communes* se répartissent de manière inégale dans les deux grandes catégories, étiquetées « Succès » et « Echecs », qui se caractérisent par un nombre élevé (respectivement faible) de transformations équivalentes à l'énoncé (la résolution est donc juste). Sur cette figure, on constate que parmi les exercices non résolus il y a une plus forte proportion d'élèves hyperactifs et/ou peu à l'aise avec l'interface.

¹⁰ Malgré ce fort taux de réussite, cet exercice a été choisi car les autres exercices du même type (« réduire ») ont été aussi largement résolus mais comptaient beaucoup moins d'élèves.

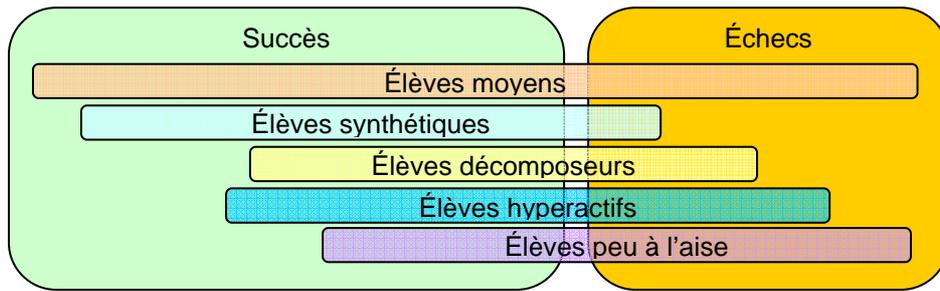


Figure 24. Schéma de la position de la typologie par rapport aux succès/échecs.

A l'aide de ce type d'étude, nous obtenons des groupes d'élèves ayant des comportements similaires dans l'environnement de travail. Cela apporte des indications sur des aspects différents de l'interaction de l'élève avec l'EIAH, non liés à la description des compétences mathématiques de l'élève, mais permettant d'analyser d'autres points, comme l'aisance des élèves dans leur interaction avec le micromonde. En particulier, la base de données recueillant la moindre microaction est une source d'informations intéressante pour un ergonomiste : son exploitation par des méthodes de classification automatique est réalisable et à approfondir. Par exemple, une prise en compte spécifique de la succession des actions de l'élève pourrait permettre d'exhiber des *profils temporels d'interaction* : les étapes longues (en durée) et riches en séquences d'édition, signes d'hésitation, pourraient être corrélées avec les types d'opérations problématiques pour l'élève, et ainsi fournir des informations complémentaires.

Cependant, la représentation par vecteur de statistiques restant évidemment insuffisante pour caractériser les compétences algébriques de l'élève, nous nous sommes intéressés à une représentation de vecteurs basés sur les règles qui sont produites via les diagnostics d'ANAÏS, et aux classifications obtenues à l'aide de cette modélisation des connaissances de plus haut niveau.

3.7.2.2 La classification des élèves à partir des règles ANAÏS

Le diagnostic local engendré par ANAÏS est le mécanisme qui permet de fournir une séquence de règles pour chaque transformation d'étape : l'avantage de cette description est d'être indépendante des expressions particulières manipulées. Les diagnostics locaux prennent la forme présentée dans la figure 25.

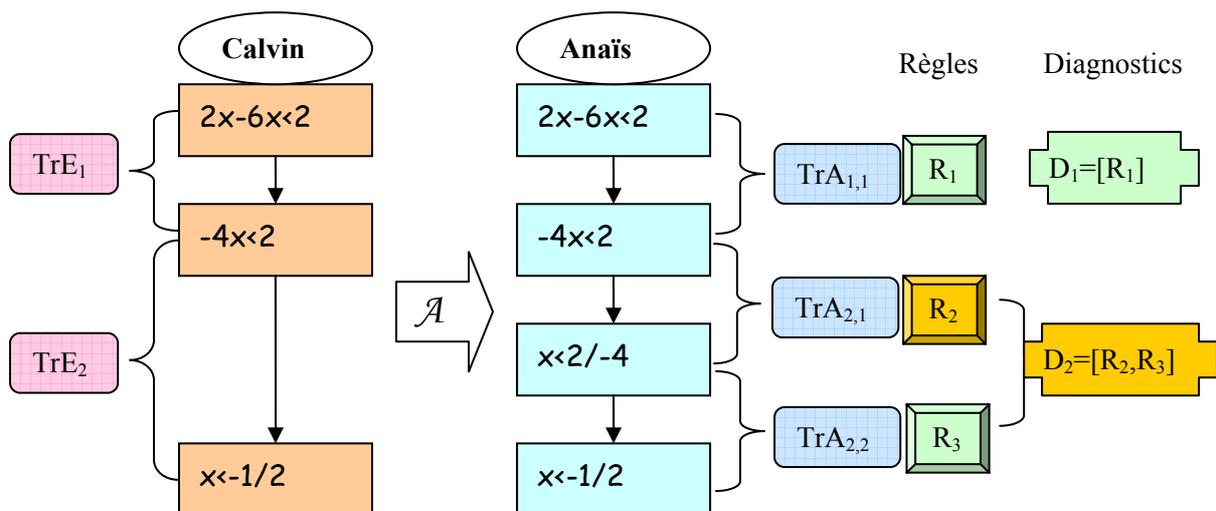


Figure 25. Format des diagnostics Anaïs pour l'exemple de l'élève Calvin.

Le but de cette nouvelle analyse statistique est de se baser sur les règles inférées par ANAÏS, afin d'obtenir des groupes d'élèves homogènes du point de vue (qualitatif) des connaissances procédurales, et non plus selon son comportement (quantitatif) dans l'environnement de travail. Notons qu'il n'y a pas une unique manière d'encoder l'information renvoyée par ANAÏS pour les diagnostics locaux, aussi avons-nous expérimenté plusieurs possibilités d'encodage des productions d'élèves (Renaudie 2005). Nous ne présentons ci-après que l'encodage qui s'est avéré être le plus informatif.

Cette approche consiste à représenter chaque production d'élève par les identifiants des règles ANAÏS des diagnostics locaux, en attribuant comme valeur à chaque règle son nombre d'occurrences dans le diagnostic. Chaque élève est donc représenté par un vecteur de règles comme $[1,1,1,0,\dots,0] \in \mathbb{N}^h$, h étant le plus grand numéro de règle diagnostiquée dans l'ensemble du jeu de données. Afin de ne pas provoquer d'écarts de distance trop importants entre des vecteurs de règles dont le nombre total d'instances de règles est faible de ceux où il est élevé, nous avons finalement choisi la représentation suivante : un *vecteur de profil fréquentiel des règles*, obtenu en divisant chaque vecteur par le nombre total d'instances de règles. Ainsi, avec l'exemple partiel de l'élève « Calvin » de la figure 25, le vecteur obtenu est le suivant :

R_1	R_2	R_3	...	R_h
1/3	1/3	1/3	0	0

Au cours de ce travail, nous avons considéré les mêmes élèves et les mêmes exercices que dans l'étude précédente sur les « actions ». Cela correspond à huit jeux de données comportant les mêmes nombres de vecteurs que précédemment, dont seuls les attributs ont changé. Contrairement à la représentation par vecteur de statistiques, dans le cas de la représentation adoptée dans cette partie, les axes de chaque jeu de données représentent des jeux de règles qui lui sont spécifiques. En effet, les règles employées diffèrent pour des exercices de factorisation, de réduction, ou de résolution d'équations par exemple. Le tableau 14 donne quelques statistiques élémentaires sur les nombres de transformations d'étape et de transformations ANAÏS, pour chaque exercice.

Exercice	Dimension : nombre de règles R_i	Nombre moyen de TrE par production	Nombre moyen de TrA par production	Nombre moyen de TrA par TrE
159	9	1.91	3.56	1.86
160	25	5.39	12.05	2.24
165	33	3.09	5.29	1.71
170	25	3.28	5.65	1.72
172	37	3.57	6.89	1.93
185	33	5.86	11.43	1.95
191	7	1.07	1.32	1.23
230	19	3.31	7.62	2.30

Tableau 14. Dimensions et nombres de transformations d'étapes (TrE) et transformations ANAÏS (TrA), pour les huit jeux de données basés sur la représentation par règles.

Les graphes de la figure 26, qui reprennent sous la forme d'histogrammes les colonnes 3 et 4 du tableau 14, montrent que les exercices « complexes » n°160 et n°185, c'est-à-dire correspondant au calcul et à la résolution d'inéquation de degré deux, ont nécessité plus de transformations et de règles que les autres, au contraire de l'exercice de factorisation (n°191). Cependant, l'observation du nombre moyen de transformations par élèves en dernière colonne du tableau 14 montre que ce rapport reste voisin de 2 pour l'ensemble des exercices. Ce chiffre semble raisonnable par rapport au niveau de granularité de la transformation d'étape, puisqu'il signifie que les élèves effectuent en moyenne deux opérations en une transformation.

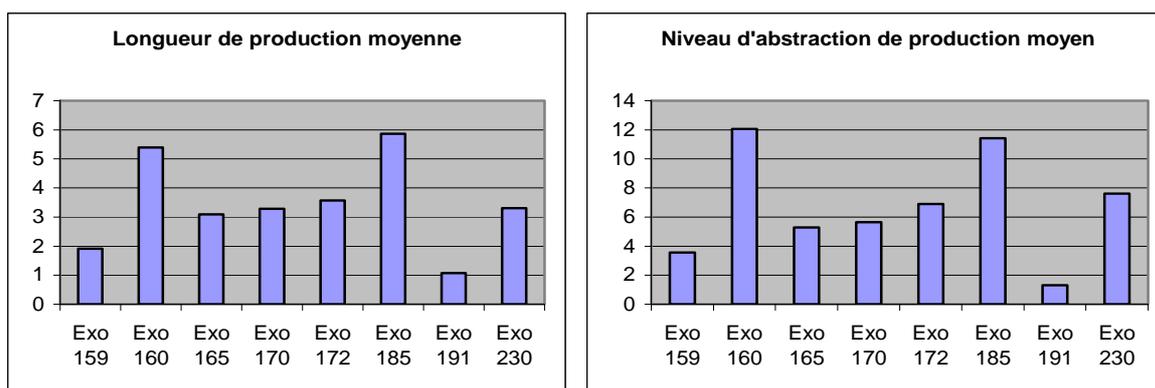


Figure 26. Graphes de statistiques des jeux de données basés sur une représentation par règles.

Après application de l’algorithme SPC, nous obtenons huit classifications d’élèves différentes, une par type d’exercice. Nous ne les présentons pas exhaustivement dans cette partie (cf. Renaudie 2005 pour plus de détails), mais nous allons examiner les groupes qui sont produits pour les élèves ayant travaillé sur l’exemple 165 « Résoudre $3-2x=3x-6$ », car ils illustrent le type de résultat que nous obtenons par classification. Par abus de langage, nous emploierons l’expression « l’élève *utilise* ou *applique* la règle R_2 » afin de faciliter la lecture des résultats, mais gardons en tête le fait que les règles sont *attribuées* par le diagnostic local, et non réellement utilisées directement par l’élève dans l’environnement APLUSIX. La résolution « canonique » de cet exercice est la suivante :

Opération	Exemple	R	Nom de la règle	Explication de la règle
Faire passer le terme en x à gauche	$3-2x=3x-6 \rightarrow 3-2x-3x=-6$	R_8	<i>SEMI MoveAdditif ChangeSigne</i>	Mouvement additif avec changement de signe de l’argument
Faire passer le terme constant à droite	$3-2x-3x=-6 \rightarrow -2x-3x=-6-3$	R_8	<i>SEMI MoveAdditif ChangeSigne</i>	Mouvement additif avec changement de signe de l’argument
Calculer le terme de gauche	$-2x-3x=-6-3 \rightarrow -5x=-6-3$	R_2	<i>RES GroupAdditif CoeffRationnel</i>	Calcul additif entre monômes
Calculer le terme de droite	$-5x=-6-3 \rightarrow -5x = -9$	R_3	<i>RES_PlusEntier</i>	Calcul de somme entre entiers
Faire passer -5 à droite	$-5x=-9 \rightarrow x = 9/5$	R_{16}	<i>SEMI MoveNum VersDeno</i>	Mouvement multiplicatif du numérateur vers le dénominateur ¹¹

Tableau 15. Règles employées pour la résolution canonique de l’exercice n°165.

Toutefois, dans le travail effectué par les élèves sur cet exercice, ANAÏS trouve que les règles suivantes ont également été utilisées (les lignes en orange correspondent à des règles erronées) :

¹¹ La réduction du double signe ‘-’ est comprise et ne nécessite pas de règle spécifique selon ANAÏS.

Opération	Exemple	R	Nom de la règle	Explication de la règle
(transformation non diagnostiquée)	$3-2x=3x-6 \rightarrow 18x=2$	R ₉	<i>echec</i>	Échec de l'algorithme de diagnostic d'ANAIS
Commuter les membres	$-9=-5x \rightarrow -5x=-9$	R ₁₅	<i>SEMI Commuter Relation</i>	Commutation des membres gauche et droit d'une (in)équation
Faire passer un terme additif de l'autre côté avec erreur de signe	$3-2x=3x-6 \rightarrow 3-2x+3x=-6$	R ₁₇	<i>ER MoveAdditif ChangePasSigne</i>	Mouvement additif sans changement de signe de l'argument
Faire passer un terme additif de l'autre côté	$3-2x=3x-6 \rightarrow 3-2x-3x=-6$	R ₂₂	<i>RES MoveAdditifChangeSigneSEM</i>	Mouvement additif avec changement de signe de l'argument ¹²
Diviser des 2 côtés par -5	$-5x=-9 \rightarrow -5x/-5=-9/-5$	R ₂₅	<i>SEMI DiviserRelationChangeSens</i>	Division des deux membres par la même quantité
Faire passer -5 au numérateur de l'autre côté	$-5x=-9 \rightarrow x=-5/-9$	R ₃₃	<i>ER MoveNumEt Inverse</i>	Mouvement multiplicatif de numérateur vers numérateur
Simplifier -1 de la fraction	$x=-9/-5 \rightarrow x=9/5$	R ₃₉	<i>RES_npa/mpb</i>	Simplification numérique d'une fraction
Faire passer le -5 en changeant son signe	$-5x=-9 \rightarrow x=-9/5$	R ₄₄	<i>ER MoveNumVers DenoChangeSigne</i>	Mouvement multiplicatif avec changement de signe

Tableau 16. Autres règles employées pour l'exercice n°165.

La variété de stratégies de résolution est vaste, puisqu'il y a 11 groupes produits par classification. Ils sont représentés graphiquement sur la Figure 27, accompagnés des règles qui les caractérisent. Sur ce schéma, nous avons aussi représenté de très petits clusters, afin d'illustrer des erreurs liées à ce type d'exercice, même si elles sont rares. De plus, nous avons réuni les clusters C₁ et C₆, car ils ne diffèrent que d'une règle : R₂₂ pour C₆ au lieu de R₈ dans C₁. Or, dans la note de bas de page concernant R₈, nous expliquons que R₈ et R₂₂ sont deux représentations SIM d'une même règle ANAIS (cf. 3.5.3, Représentation informatique de la règle de mouvement). Ce problème de représentation provoque la création de deux clusters au lieu d'un. Cette séparation peut toutefois être utile, puisque la présence de R₂₂ à la place de R₈ donne un renseignement supplémentaire : le mouvement réalisé a été couplé à un calcul.

¹² Variante « sémantique » de la règle R₈, (ce sont deux représentations SIM d'une même règle ANAIS) lorsque la transformation d'étape ne fait pas explicitement figurer l'argument qui a été déplacé. Par exemple, R₈ est diagnostiquée pour la transformation d'étape $2x=3+3x \rightarrow 2x-3x=3$ et la seconde pour $2x=3+3x \rightarrow -x=3$, assortie de la règle R₂ calculant $2x-3x \rightarrow -x$. Ainsi, s'il y a eu un calcul simultané au mouvement, elles peuvent être diagnostiquées pour une même transformation ANAIS.

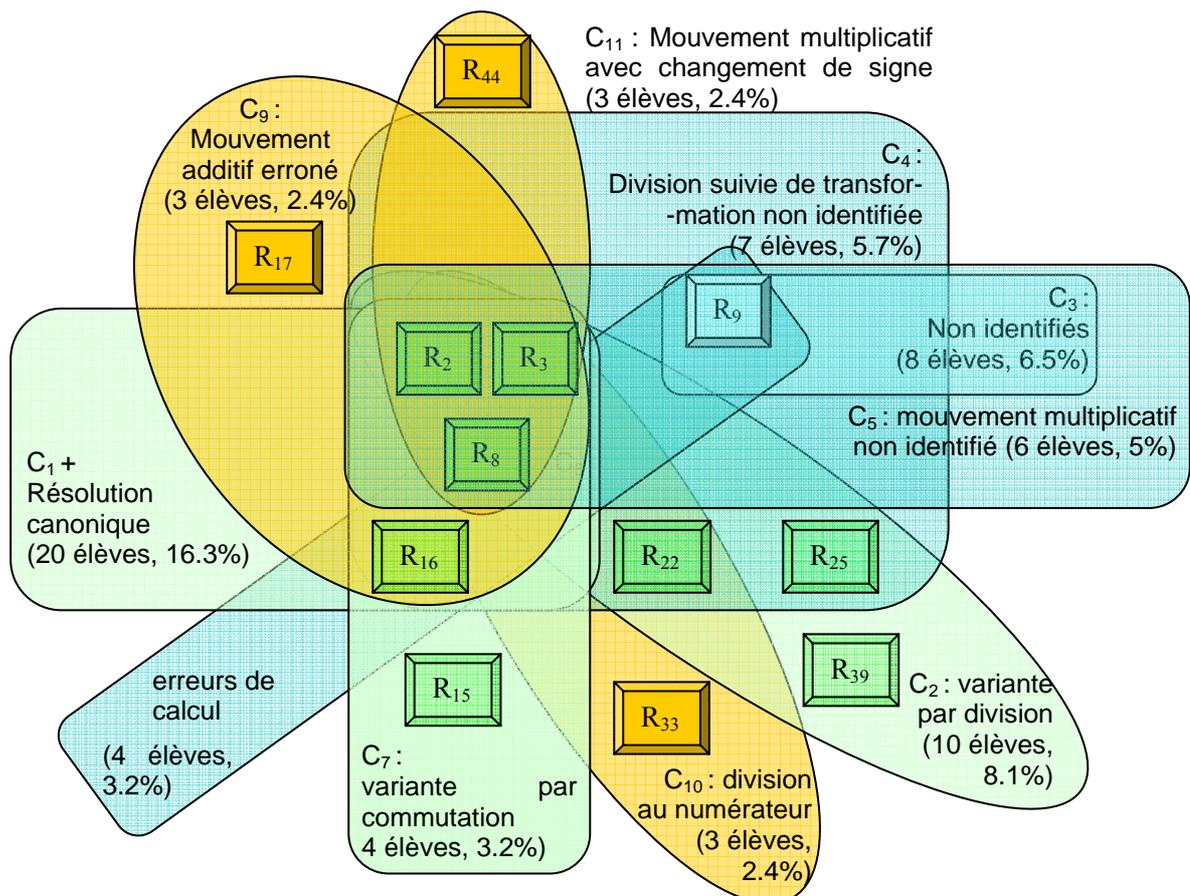


Figure 27. Schéma récapitulatif des clusters à base de règles, détectés pour l'exercice n°165. La somme des pourcentages n'est pas 100% dans la mesure où tous n'ont pas traité cet exercice, par ailleurs la superficie des zones n'est pas proportionnelle aux nombres d'élèves.

De même, les statistiques sur les actions de ces différents groupes peuvent se synthétiser en 8 tendances générales (figure 28), en les regroupant selon la résolution (pour les traitements corrects, en vert) et le type général d'erreur (pour les traitements erronés, en orange). Par exemple, la tendance appelée « résolution prudente » concerne les élèves qui séparent les opérations de mouvement de celles de calculs, et pour certains d'entre eux, décomposent le mouvement multiplicatif en une multiplication des deux membres par la même quantité, suivie d'une simplification. La « résolution alternative » concerne des élèves ayant regroupé les termes en x à droite du signe égal, et qui échangent le monôme et la constante de part et d'autre de l'équation, juste avant le mouvement multiplicatif. Quant à la tendance de « mouvements multiplicatifs erronés », elle regroupe les quatre clusters où les élèves se trompent lors du mouvement multiplicatif, que ce soit en changeant le signe de l'argument ou en le faisant passer au numérateur du terme de droite.

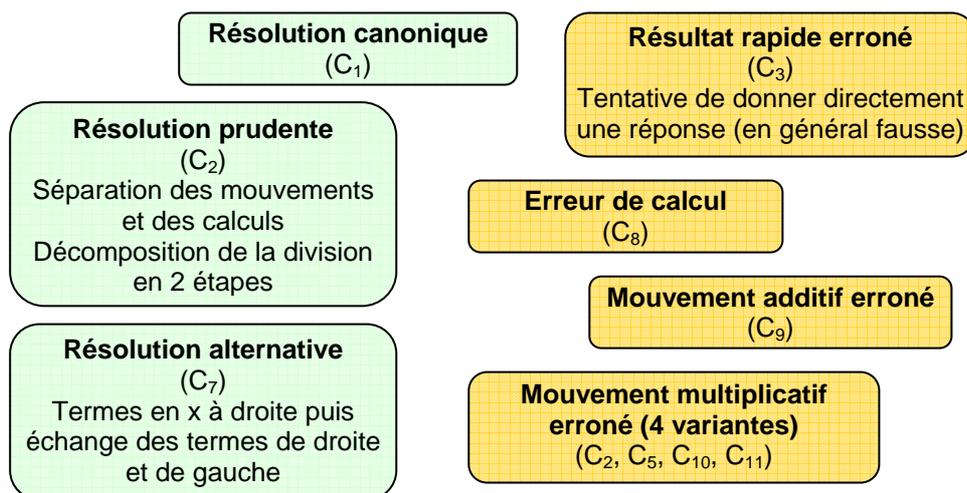


Figure 28 : Schéma synthétique des tendances pour l'exercice n°165.

Cet exemple montre que l'analyse de classifications d'élèves décrits par les règles permet de caractériser l'ensemble des stratégies de résolution effectivement employées par les élèves sur quelques exercices. Chaque type de problème (calculer, résoudre...) est caractérisé par des ensembles de règles spécifiques aux procédures employées par les élèves, et le nombre de règles est lié au degré de liberté laissé par le problème à résoudre. Le processus de classification étant non supervisé, on voit apparaître des clusters correspondant à des comportements non attendus et non triviaux, par exemple les regroupements C_7 et C_{10} ci-dessus. L'ensemble de ces clusters, pour chaque exercice, constitue un ensemble de comportements au niveau procédural, qui est utile pour effectuer une étude didactique des productions d'élèves. Ainsi, au cours de ce projet, cette analyse a identifié les règles décrivant les traitements courants et les erreurs de chaque exercice et a permis d'alimenter le processus de développement du mécanisme de diagnostic local.

3.7.3 L'approche par modélisation symbolique

3.7.3.1 Présentation du modèle CATI

Dans cette seconde approche « modélisation par apprentissage automatique », nous sommes partis de la constatation que les analyses effectuées par les didacticiens s'appuyaient généralement sur plusieurs exercices traités par un même élève, afin de dresser un bilan précis de ses connaissances et de tenir compte de l'ensemble de ses expériences individuelles. Aussi, contrairement à la partie précédente où nous cherchions des caractéristiques communes à plusieurs élèves, nous avons adopté ici un raisonnement analogue à celui des « experts » du domaine, en cherchant à caractériser l'élève par une description spécifique, basée sur son comportement dans plusieurs exercices. De surcroît, nous nous sommes limités à l'analyse des élèves sous l'angle d'un seul sous-domaine afin d'évaluer précisément l'intérêt de notre approche. Pour des raisons techniques dues d'une part, au degré de développement d'ANAÏS et, d'autre part, à la possibilité de valider nos résultats par des études didactiques, nous avons étudié les « mouvements » dans les équations et inéquations (cf. partie 3.5).

Notre démarche s'appuie le cadre théorique des conceptions d'Artigue (1991) et le *modèle des conceptions* « cKç » (Balacheff, 2001, Soury-Lavergne, 2003) en considérant, comme en 3.6.2, les trois composantes « Contexte », « Action » et « Théorème-en-acte » et ajoutant une entité que nous appelons « Irrégularité ». Nous les détaillons par la suite.

L'ensemble constitue le modèle CATI (Renaudie 2005) dans lequel le comportement de l'élève, basé sur une caractérisation des diagnostics locaux par ANAÏS, est représenté sous une forme

permettant d'inférer, à l'aide d'un algorithme de généralisation symbolique inspiré de « l'espace des versions » (Mitchell 1997), les conceptions des élèves.

Dans le modèle cK ϕ , chaque *conception* permet d'établir un lien entre les connaissances de l'élève et les problèmes que l'élève traite. De manière plus formelle, une conception est définie par un quadruplet (P, L, R, Σ) qui permet d'établir, pour un langage de représentation du domaine L, un lien entre : la manière dont un élève aborde un ensemble de *problèmes* P, les *opérateurs* de transformation R qu'il utilise et l'ensemble Σ des *stratégies et contrôles* qu'il met en œuvre. Pour les besoins du projet, nous nous sommes focalisés¹³ sur la description des entités P et R, en les adaptant à la modélisation des productions d'élèves utilisant APLUSIX, de la façon suivante.

D'une part, nous avons différencié l'acception épistémique de la notion de problème de son acception formelle, en introduisant la notion *d'état du problème* pour caractériser nos observables : c'est-à-dire les étapes de résolution intermédiaires produites par l'élève. En d'autres termes, l'énoncé d'un exercice correspond à la notion de problème P au sens cK ϕ , et les états successifs de l'expression en cours de traitement à des états du problème. D'autre part, les opérateurs de R correspondent à des règles ANAÏS intégrant dans leur description un ensemble d'attributs qui permettent de préciser *l'environnement* dans lequel le diagnostic a été réalisé. Nous avons décomposé ces attributs supplémentaires en deux sous-ensembles distincts :

- Les attributs de *contexte*, précisant l'environnement perceptif et mathématique de la transformation qui sert de support à l'opérateur,
- Les attributs d'*action*, précisant le *modus operandi* effectif de cet opérateur.

En introduisant cette seconde distinction, nous sommes en mesure de détecter des ensembles de contextes conduisant à effectuer une action identique, que nous appelons *théorème-en-acte*. Ce terme, emprunté à Vergnaud (2001), caractérise chez l'agent ce qui tient lieu de théorème et qu'il applique en pratique (c'est-à-dire « en-acte »), un peu comme une recette. De manière duale, s'il effectue des actions diverses face à un même contexte, nous considérons qu'il s'agit *d'irrégularités* de comportement. En effet, cela correspond aux cas où l'élève a appliqué plusieurs méthodes dans un même contexte : elles sont donc révélatrices de connaissances non stabilisées, d'erreurs d'inattention ou encore de connaissances contradictoires.

Comme dans la section 3.6, nous utilisons fréquemment ci-dessous l'abréviation TeA pour *théorème-en-acte*.

3.7.3.2 Description des entités du modèle

Le *contexte d'un opérateur* correspond à la caractérisation des conditions préalables à la réalisation d'une *action*. Il n'est pas directement déductible de la donnée d'un état du problème, puisque ce dernier est seulement constitué d'une consigne (résoudre, factoriser...) et d'une expression source. En pratique, on ne peut caractériser le contexte qu'à partir de l'observation de ce qu'a fait l'élève *a posteriori*. A ce titre, il est donc nécessaire de prendre en compte *l'expression résultat* afin d'en déduire rétrospectivement quel était l'environnement des termes concernés par l'application de l'opérateur. Par exemple, il s'agira de déterminer quel est l'argument de l'expression initiale qui est à l'origine du mouvement effectué par l'élève.

Avec l'aide d'Hamid Chaachoua, nous avons sélectionné un certain nombre de descripteurs candidats pour décrire les contextes de mouvement. C'est par ajustements progressifs, guidés par la

¹³ Le langage L, ou pour être plus précis, son implémentation, est décrit dans la suite du rapport. En revanche, l'ensemble Σ n'a pas été traité dans notre modèle, car il n'est pas certain que nous puissions l'identifier précisément dans le cadre d'exercices qui ne sont constitués que par un faible nombre de productions.

qualité des régularités détectées avec différents jeux d'attributs, que nous avons retenu ceux présentés dans le tableau 17 et qui ont été intégrés dans le diagnostic effectué par les règles ANAÏS.

Contexte		
Attribut	Valeurs possibles	Explication
Type d'équation	<i>Egalite</i> <i>Inégalité</i>	Précise le type de relation entre les partie droite et gauche de l'expression initiale.
Opérande de l'argument	<i>Additif</i> <i>Multipliatif</i>	Vaut Additif si l'argument était membre d'une somme, Multipliatif pour un produit.
Position de l'argument	<i>Gauche</i> <i>Droite</i>	Position initiale de l'argument du mouvement par rapport au signe de relation.
Type de l'argument	<i>Numérique</i> <i>Polynome</i>	Type sémantique de l'argument.
Signe de l'argument	<i>Positif</i> <i>Négatif</i>	Signe à gauche de l'argument.

Tableau 17. Attributs décrivant le contexte.

Exemple : pour la transformation : $-4x \times 2 \rightarrow x \times 2 / -4$, le contexte de l'opérateur est :
 $C = (\text{Inégalité}, \text{Multipliatif}, \text{Gauche}, \text{Numérique}, \text{Négatif})$.

Ce qui s'interprète par : « l'argument de cette transformation est membre d'un opérateur multiplicatif, de type numérique, de signe négatif, et qui est situé à gauche d'une inéquation. ».

De son côté, l'action associée à un opérateur correspond à la description de l'opération effectivement réalisée par l'élève (ou pour être plus exact : telle qu'elle a été diagnostiquée par ANAÏS). Comme pour le contexte, les attributs retenus pour décrire une action l'ont été par ajustements successifs. La liste est représentée dans le tableau 18.

Action		
Attribut	Valeurs possibles	Explication
Modification du type de relation	<i>ChangeType</i> <i>ChangePasType</i>	Il vaut ChangeType si le symbole de relation passe de > ou < à = ou réciproquement.
Type de Mouvement	<i>Additif</i> <i>Multipliatif</i> <i>AddMultipliatif</i> <i>MultAdditif</i>	Type de mouvement effectivement réalisé. Par exemple, le mouvement : $x+3-2 \rightarrow x=3*2$ est diagnostiqué comme « AddMultipliatif »
Orientation verticale	<i>NumVersNum</i> <i>NumVersDeno</i> <i>DenoVersNum</i> <i>DenoVersDeno</i> <i>NonApplicable</i>	Dimension « verticale » du déplacement de l'argument, entre le numérateur (ou le dénominateur) de la source et celui de la destination. Il vaut « NonApplicable » pour un mouvement additif.
Changement de signe	<i>ChangeSigneArg</i> <i>ChangePasSigneArg</i>	Indique s'il y a changement de signe de l'argument lors du mouvement
Changement de sens de l'inégalité	<i>ChangeSens</i> <i>ChangePasSens</i> <i>NonApplicable</i>	Indique s'il y a changement du sens de l'inégalité lors du mouvement. Ce descripteur prend la valeur « Nonapplicable » pour un mouvement dans un équation.

Tableau 18. Attributs décrivant une action.

Exemple : pour la transformation : $-4x \times 2 \rightarrow x \times 2 / -4$, l'action effectuée est :
 $A = (\text{ChangePasType}, \text{Multipliatif}, \text{NumVersDeno}, \text{ChangePasSigneArg}, \text{ChangePasSens})$.
ce qui s'interprète comme : « l'élève a effectué un mouvement multiplicatif du numérateur vers le dénominateur, sans changer le type de relation, ni le signe de l'argument, ni le sens de l'inéquation. »

L'observation d'une action identique dans des contextes différents¹⁴, et cela pour l'ensemble des opérations de mouvements effectués par un élève, témoigne de la présence d'un *théorème-en-acte*. L'exemple de la figure 29 illustre ce type de régularité.

¹⁴ Et qui soient statistiquement représentatifs, mais nous ne détaillerons pas cet aspect dans ce rapport.

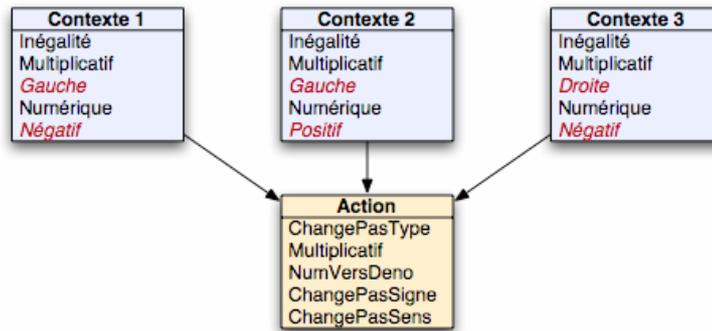


Figure 29. Exemple de régularité caractérisant un théorème-en-acte.

De surcroît, nous avons cherché à résumer ces régularités sous une forme à la fois plus interprétable et plus condensée, de manière à obtenir une description « synthétique » des contextes constituants d'un théorème-en-acte. Pour cela, nous avons mis en œuvre une méthode classique d'apprentissage par *induction symbolique* qui est basée sur le calcul de la Généralisation Maximalement Spécifique (ou MGS) avec l'algorithme de l'espace des versions (Mitchell, 1997). Dans ce contexte, l'apprentissage (machine) est vu comme un *processus de recherche* ayant pour objectif de trouver parmi l'espace des hypothèses (une structure de treillis partiellement ordonné par une relation de généralité) les modèles qui sont une généralisation correcte et cohérente des données. Dans le cadre du langage de représentation adopté ici, le processus de généralisation est trivial et consiste à mettre en correspondance les éléments des contextes en appliquant une « règle de rejet » (dropping rule) lorsque les valeurs observées sont contradictoires. Dans l'exemple précédent le théorème-en-acte est donc celui de la figure 30. Les valeurs d'attributs remplacées par des « ? » (jokers) expriment le fait que ces valeurs ne sont pas pertinentes pour ce théorème ; dès lors, plus un théorème comprend de « ? » dans sa partie contexte plus son domaine d'application est général.

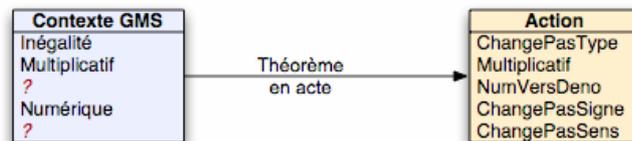


Figure 30. Théorème-en-acte après généralisation des contextes.

De manière duale aux théorème-en-actes, on peut également détecter des *irrégularités* qui correspondent aux cas où l'élève effectue plusieurs actions différentes (statistiquement significatives) face à un même contexte. La figure 31 en est une illustration avec sa généralisation GMS finale.

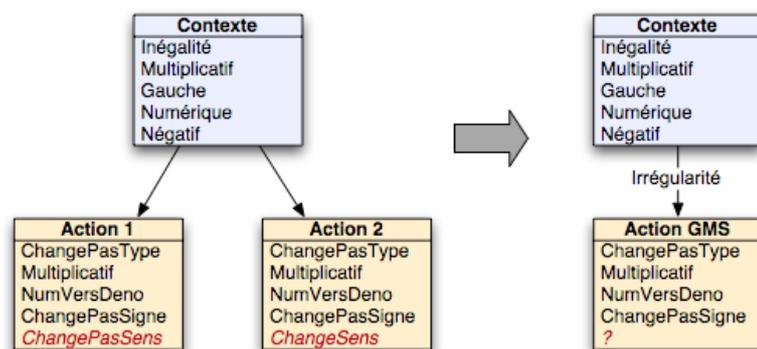


Figure 31. Exemple d'irrégularité avec généralisation des actions.

D'un point de vue informatique, la recherche de ces régularités ne pose pas de problème. Elle est effectuée en 2 phases : tout d'abord une extraction dans la base de données des « opérations de mouvement » via une requête SQL, puis la construction des théorèmes-en-acte et irrégularités pour chaque élève. Notons que l'on garde dans une « hash-table » les identifiants et caractérisations des objets construits (contextes, actions, théorèmes-en-acte et irrégularités), afin de ne pas les recréer s'ils sont détectés chez plusieurs élèves. Ainsi, nous pouvons repérer les entités qui sont partagées.

3.7.3.3 Résultats expérimentaux

L'expérimentation EXP-Annemasse a constitué notre jeu de données privilégié pour tester la modélisation CATI, car elle avait été spécifiquement dédiée à des exercices de type résolution d'équations et d'inéquations, ce qui nous a permis de disposer d'un nombre élevé de transformations ANAÏS (TrA) impliquant des mouvements. L'expérimentation comporte 23 exercices qui ont été proposés à 24 élèves d'une classe de seconde ; 21 élèves ont traité l'intégralité de ces 23 exercices, un seul élève n'en a traité que 14. Le tableau 19 montre que nous avons au total 975 transformations de mouvement, d'où une moyenne de 40.6 « mouvements » par élève. Ce nombre peut sembler faible, mais il s'est avéré suffisant pour détecter des théorèmes-en-acte.

Nombre d'élèves	Nombre de productions	Nombre total de TrA	Nombre de TrA de mouvement	Nombre moyen de TrA de mouvement par élève
24	549	2501	975	40.6

Tableau 19. Statistiques générales pour l'expérimentation EXP-Annemasse

Le tableau 20 donne des indications sur les entités CATI obtenues à l'issue de l'application de notre modèle et montre quelques statistiques sur leurs nombres d'instances.

Entités du modèle CATI	Nombre de cas observés	Nombre d'instances par élève			
		Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
Contextes	23				
Actions	16				
Opérateurs	45	40.6	7.15	20	49
Théorèmes-en-acte	21	4.9	0.8	4	7
Irrégularités	17	1.1	0.9	0	4

Tableau 20. Nombres et instances d'entités construites automatiquement à partir de EXP-Annemasse

On peut constater qu'un nombre élevé de contextes différents ont été instanciés, puisque 23 des $2^5=32$ possibles sont présents. En revanche, seulement 16 actions sur les 32 possibles et 45 des 368 ($23 \cdot 16$) opérateurs ont été effectivement appliqués. Les élèves ont donc engendré une partie importante des contextes possibles : ceci résulte du fait que les exercices ont été conçus pour couvrir

un large nombre de contextes, mais aussi que le langage de description des contextes compte (à dessein) un petit nombre d'attributs. La faible diversité d'actions montre une homogénéité comportementale au niveau de la classe. Pour EXP-Annemasse, seuls 21 théorèmes-en-acte ont été construits, tous élèves confondus, et chaque élève est caractérisé par un nombre de théorèmes-en-acte (que nous désignerons par « TeA ») compris entre 4 et 7 : cela fait apparaître une forte homogénéité des connaissances dans cette classe.

- Les théorèmes-en-acte engendrés avec EXP-Annemasse

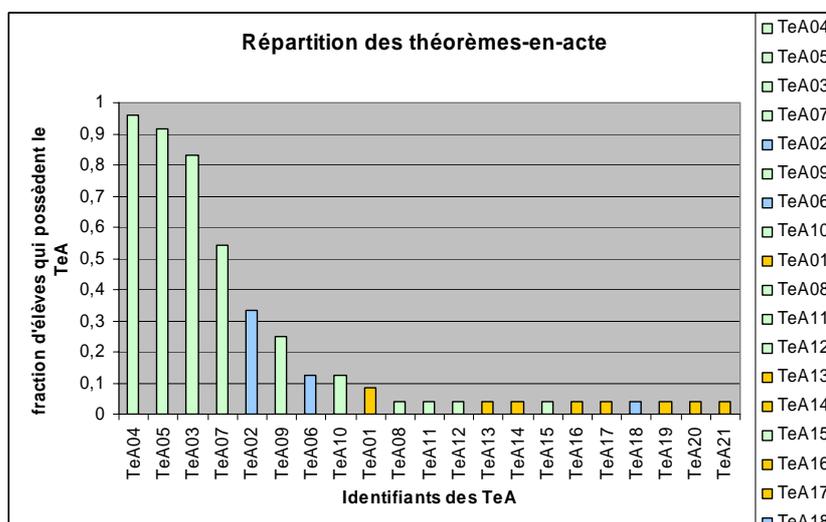


Figure 32. Répartition des TeA pour EXP-Annemasse. En abscisse figurent les identifiants des TeA (de TeA01 à TeA21) et en ordonnée le rapport entre le nombre total de fois où ce TeA a été attribué sur le nombre total d'élèves. Comme le trait « posséder un TeA » est binaire (présence ou absence), la grandeur représentée en ordonnée est directement proportionnelle au nombre d'élèves qui possèdent le TeA. La couleur correspond au statut : vert pour correct, orange pour totalement erroné, bleu pour partiellement correct.

La figure 32 montre que quatre TeA (Tea04, Tea05, Tea03, Tea07) sont présents chez plus de 50% des élèves, et tous de statut correct. Examinons-les de plus près.

- Les théorèmes-en-acte majoritaires

TeA03	Correct
<i>Egalite; Multiplicatif; Gauche; ?; Numerique</i>	
<i>ChangePasType; Multiplicatif; NumVersDeno; ChangePasSigneArg; NonApplicable</i>	

Ce TeA03 consiste à effectuer un mouvement multiplicatif correct d'un argument numérique situé à gauche dans une équation. On peut le résumer ainsi : $ax=b \rightarrow x=b/a$. Il est peu surprenant que ce TeA soit très fréquent (83%), car il s'agit d'un mouvement correct classique et en général bien assimilé par les élèves, dont l'usage est indispensable pour résoudre l'exercice.

TeA05	Correct
<i>Egalite; Additif; ?; ?; ?</i>	
<i>ChangePasType; Additif; NonApplicable; ChangeSigneArg; NonApplicable</i>	

Ce TeA très général consiste à effectuer un mouvement additif dans une équation en changeant le signe de l'argument. Il est extrêmement fréquent (91%), ce qui indique que les élèves semblent avoir bien assimilé ce type de mouvement en seconde (ce qui est plutôt rassurant).

TeA04	Correct
<i>Inégalité; Additif; ?; ?; ?</i>	
<i>ChangePasType; Additif; NonApplicable; ChangeSigneArg; ChangePasSen</i>	

Ce TeA très général consiste à effectuer un mouvement additif dans une inéquation en changeant le signe de l'argument et sans changer le sens de l'inégalité. Sa fréquence est de 54%.

TeA07	Correct
<i>Inegalite;Multiplicatif;Gauche;+;Numerique</i>	
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;ChangePasSigneArg;ChangePasSens</i>	

Ce TeA est très spécifique, il consiste à effectuer un mouvement multiplicatif correct d'un argument numérique positif dans une inéquation, c'est-à-dire sans changer le sens de l'inégalité. Il est extrêmement fréquent (95%), car il fait aussi partie des TeA indispensables pour résoudre l'exercice.

- ***les théorèmes-en-acte intéressants***

TeA02	Partiellement correct
<i>Inegalite;Multiplicatif;Gauche;?;Numerique</i>	
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;ChangePasSigneArg;ChangePasSens</i>	

Ce TeA assez courant (33%) consiste à effectuer un mouvement multiplicatif d'un terme numérique toujours de la même manière (sans changer le sens de l'inégalité), que cet argument soit positif ou négatif. Il s'agit du cas intéressant où il y a mobilisation d'une connaissance antérieure – valide lorsqu'il s'agit d'équations – dans un nouveau contexte où elle ne l'est plus (les inéquations). La présence de ce théorème-en-acte a été confirmée par l'analyse manuelle par des didacticiens.

TeA06	Partiellement correct
<i>Inegalite;Multiplicatif;?;?;Numerique</i>	
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;ChangePasSigneArg;ChangePasSens</i>	

Il s'agit du même type de TeA que TeA02, à la différence que celui-ci est appliqué indifféremment selon la position de l'argument (gauche/droite). On a $TeA02 \subset TeA06$ mais TeA06 est moins fréquent (12.5%). Globalement, 45% des élèves utilisent l'un de ces 2 TeA et près de la moitié montrent au moins une irrégularité relative à ce contexte. Cela montre clairement que les mouvements multiplicatifs d'arguments négatifs dans les inéquations sont source de difficultés.

Enfin, pour ce qui est des mouvements additifs, quelques TeA peuvent être signalés. Tout d'abord, TeA20, diagnostiqué lorsqu'il y a un mouvement additif sans changement du signe de l'argument. Ce TeA, ainsi que ses variantes, est très peu fréquent (un élève), ce qui confirme le bon niveau des élèves des classes testées en termes de compréhension des mouvements additifs.

TeA20	Totalement errone
<i>Egalite;Additif;Gauche;+;Numerique</i>	
<i>ChangePasType;Additif;NonApplicable;ChangePasSigneArg;NonApplicable</i>	

Il y a aussi TeA19, où l'élève, dès qu'il effectue un mouvement additif d'un polynôme négatif dans une inégalité, change son sens, tout en changeant le signe de l'argument.

TeA19	Totalement errone
<i>Inégalité;Additif;?;Négatif;Polynôme</i>	
<i>ChangePasType;Additif;NonApplicable;ChangeSigneArg;ChangeSens</i>	

- Les irrégularités détectées dans EXP-Annemasse

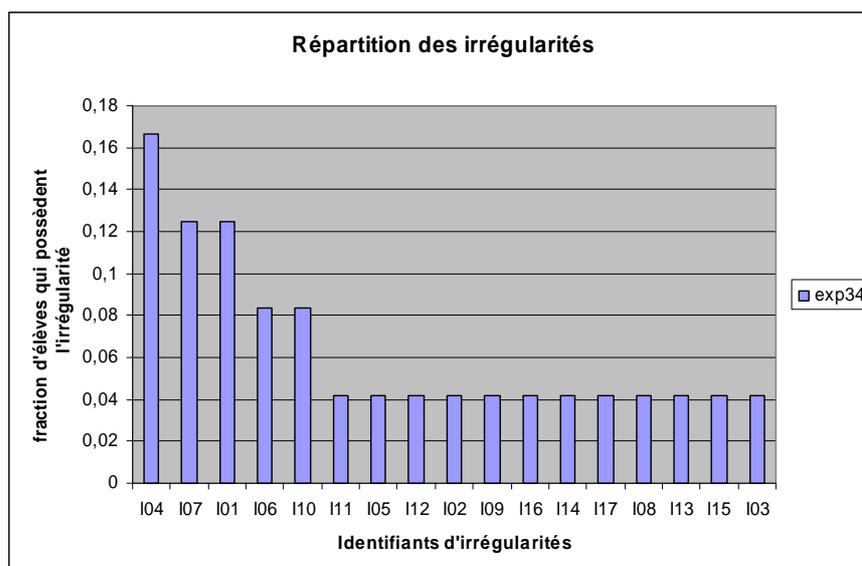


Figure 33. Répartition des irrégularités pour EXP-Annemasse. En abscisse figurent les identifiants des Irrégularités (de I01 à I17) ; en ordonnée figure le rapport entre nombre total de fois où cette irrégularité a été instanciée sur le nombre total d'élèves (24). Comme pour le graphique des TeA, la grandeur représentée en ordonnée est directement proportionnelle au nombre d'élèves qui possèdent l'irrégularité.

La figure 33 montre qu'il y a 17 irrégularités différentes, totalisant 26 instances. Comme il n'y a que 24 élèves, cela signifie que peu d'irrégularités sont largement réparties entre les élèves. L'irrégularité la plus fréquente (rencontrée chez 4 élèves sur 24) est I04 :

I04
<i>Inegalite;Multiplicatif;Gauche;Negatif;Numerique</i>
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;ChangePasSigneArg;?</i>

Il s'agit du cas où l'élève, dans un contexte d'argument négatif en position multiplicative, parfois change et parfois ne change pas le sens de l'inégalité. Les deux suivantes par fréquence décroissantes sont I07 et I01 (3 élèves) :

I07
<i>Egalite;Multiplicatif;Gauche;Negatif;Numerique</i>
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;?;NonApplicable</i>

I01
<i>Inegalite;Multiplicatif;Gauche;Negatif;Numerique</i>
<i>ChangePasType;Multiplicatif;NumVersDeno;?;?</i>

I07 est similaire à I04, mais dans le cas d'équations. Il est surprenant et intéressant de constater que certains élèves changent le signe de l'argument alors qu'il s'agit d'équations. Enfin, les deux suivantes, I06 et I10, ont été diagnostiquées chez 2 élèves :

I06
<i>Inegalite;Additif;Droite;+;Polynome</i>
<i>ChangePasType;Additif;?;?;ChangePasSens</i>

I10
<i>Inegalite;Additif;Gauche;+;Numerique</i>
<i>ChangePasType;?;?;ChangeSigneArg;ChangePasSens</i>

L'irrégularité I06 correspond à un problème de changement de signe d'un polynôme positif en position additive situé à droite ; quant à I10, il s'agit d'une irrégularité portant sur le type de mouvement : tantôt additif, tantôt additif-multiplicatif.

A partir de ces différentes informations sur les théorèmes-en-actes et les irrégularités, on peut dresser des cartes globales des modèles instanciés par chacun des élèves ayant participé à l'expérimentation EXP-Annemasse et ainsi établir une « photographie » des connaissances générales de la classe. Les graphiques présentés dans les figures 34 et 35 résument les résultats obtenus.

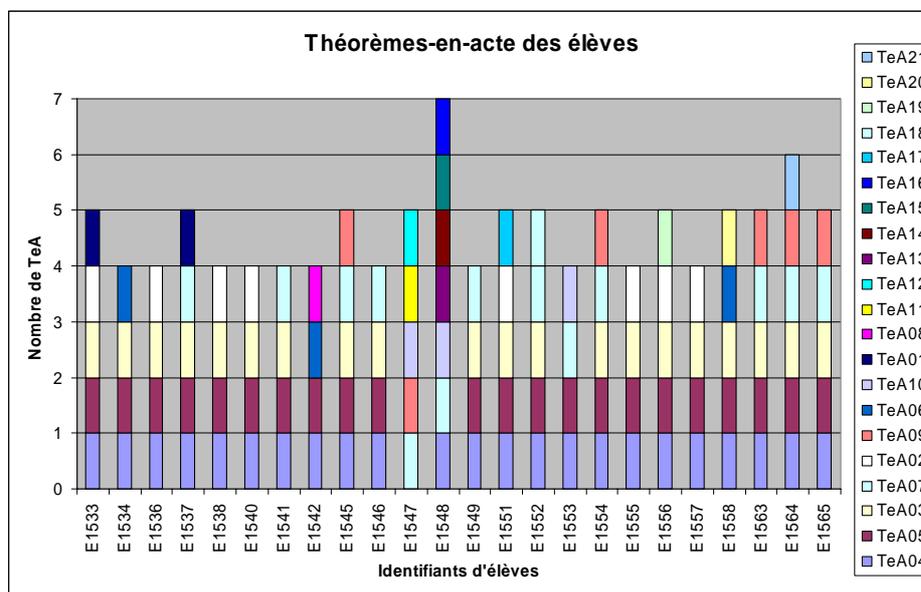


Figure 34. Répartition des TeA pour chaque élève dans EXP-Annemasse. En abscisse figurent les identifiants des élèves (de E1533 à E1565, sans ordre particulier) et en ordonnée figurent les identifiants des TeA attribués par le système à chaque élève.

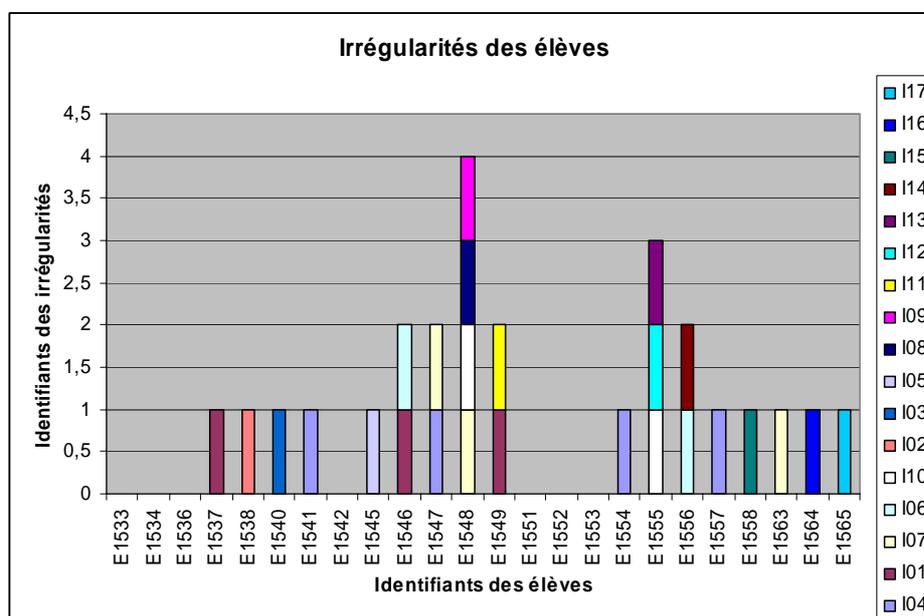


Figure 35. Répartition des irrégularités pour chaque élève dans EXP-Annemasse. En abscisse figurent les identifiants des élèves (de E1533 à E1565), sans ordre particulier et en ordonnée figurent les identifiants des irrégularités attribués par le système à chaque élève.

3.8 Elaboration de stratégies didactiques et réalisation d'un tuteur artificiel

Nous développons dans cette section le troisième objectif du projet, c'est-à-dire, l'étude, l'élaboration et l'expérimentation de modèles de stratégies d'enseignement à l'aide de l'EIAH APLUSIX. Il s'agit de construire des activités permettant de mettre en place des connaissances algébriques dans le cadre des programmes de l'enseignement secondaire, ou de faire évoluer les conceptions d'un élève ou d'un groupe d'élèves, notamment des conceptions obtenues dans les premiers travaux du projet.

Nous avons essayé de faire preuve de réalisme au niveau du contexte, de tenir compte autant que possible du cadre institutionnel et des pratiques de référence, mais nous avons aussi tenté de nous inscrire dans une proaction avec des possibilités de faire évoluer ces pratiques par les potentialités offertes par l'usage de l'EIAH APLUSIX.

Nous avons conduit nos recherches dans deux directions :

- D'une part, nous avons travaillé sur l'ensemble du champ : classe/individuel, professeur/tuteur artificiel, remédiation/enseignement dans le cadre d'une progression. Nous avons fourni une modélisation et un scénario à des professeurs, constitués d'actions d'enseignement sur certains groupes d'élèves pour les mettre à l'épreuve.

- D'autre part, à un niveau plus détaillé, nous avons travaillé à la spécification de tuteurs artificiels et à la réalisation d'un tuteur artificiel, en décrivant des actions tutorielles avec des objectifs de remédiation, fonctionnant sur le micromonde APLUSIX, et mettant en œuvre certaines stratégies d'enseignement.

Après avoir précisé quelques fondements généraux et les contextes de notre travail sur les stratégies didactiques, nous développons la méthodologie de recherche avec les différents types de spécifications retenues pour ces stratégies et nous présentons quelques exemples de stratégies. Nous terminons en développant le travail sur la réalisation de tuteurs artificiels.

3.8.1 Problématique

Nous partons d'une définition très générale de la notion de *stratégies didactiques* comme processus d'enseignement ou dispositifs (contenant ou non, en partie ou totalement, un environnement informatique), qui permettent de faire passer un élève d'un état E_1 de connaissances relativement à des objets O_1, \dots, O_n à un état de connaissances E_2 .

3.8.1.1 Les contextes

- *Des élèves de collèges ou lycée* : Nos stratégies peuvent s'adresser à l'ensemble du public de l'enseignement secondaire, collège et lycée. Nos expérimentations ont été effectuées dans des classes allant de la sixième à la première, mais la plupart portent sur les classes de quatrième, troisième et seconde.

- *L'algèbre élémentaire au collège et au lycée* : L'algèbre est une partie importante du curriculum de l'enseignement secondaire qui est située dans une partie plus vaste, appelé « travaux numériques » des programmes de collège. On peut noter une volonté de l'institution scolaire actuelle d'introduire très progressivement les compétences algébriques dans les programmes (MEN, 1999) :

Une initiation aux écritures littérales en classe de sixième, où l'on entraînera l'élève à schématiser un calcul en utilisant des lettres.

Une initiation à la résolution d'équations en classe de cinquième : « Les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de cinquième correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. »

En quatrième, une première approche de la notion de développement : « Sur des exemples numériques ou littéraux, développer une expression du type $(a+b)(c+d)$ » et « la résolution de problèmes conduisant à des *équations du premier degré à une inconnue* en quatrième ».

En classe de troisième, les identités remarquables sont introduites et utilisées dans des exercices de développement et de factorisation. Des méthodes de résolution des *inéquations du premier degré à une inconnue* sont enseignées ainsi que des *systèmes de deux équations à deux inconnues*. Sont aussi introduites les résolutions d'équations pouvant se ramener à la forme $AB = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.

La classe de seconde ne fait pas apparaître de notions algébriques véritables nouvelles, mais de nouvelles compétences sont travaillées en relation avec les fonctions : « Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée. »

- *Un contexte de l'usage d'un EIAH, APLUSIX*

Nos stratégies didactiques intègrent un contexte technologique, que les séances se passent sous la direction d'un professeur ou bien en remédiation plus personnalisée avec un tuteur artificiel. Il s'agit donc de processus d'enseignement avec un EIAH qui soulèvent les phénomènes généraux des processus d'apprentissage instrumentés dont un cadre d'analyse est fourni par Rabardel (1995). L'EIAH fournit un certain nombre de potentialités, mais aussi des contraintes qu'il faut identifier et prendre en compte.

Nous avons essayé, au-delà d'exemples précis, de nous situer dans le cadre de *l'ingénierie des EIAH* (Tchounikine 2002) : « La conception d'un EIAH support aux situations d'apprentissage nécessite la prise en compte d'une multitude de problèmes inter-reliés : analyse didactique du contexte (analyse des conceptions des élèves, des obstacles à l'évolution de ces conceptions, etc.) ; identification des objectifs d'apprentissage ; étude du contexte d'insertion de l'activité ; spécification et modélisation de l'activité proposée, ce qui nécessite la conception de la tâche à réaliser, l'identification des acteurs (élèves, co-apprenants, enseignants, tuteurs, formateurs) et de leurs rôles, la prise en compte des dispositions personnelles, des intentions et attitudes des acteurs et l'instrumentation des acteurs (développement, si nécessaire, d'outils informatiques supports de l'activité) ; étude des comportements émergents, étude de l'activité réelle et de l'usage effectif des outils ; évaluation et affinement du dispositif. »

3.8.1.2 Pourquoi produire des stratégies didactiques en algèbre ?

Tout d'abord, nous l'avons dit plus haut, ce domaine est un enjeu officiel d'apprentissage important au collège et au lycée en France, et dans les autres pays en général. De plus, il fournit des outils pour la plupart des autres domaines mathématiques, de la géométrie à l'analyse, et de certains domaines non mathématiques, en particulier pour toutes les sciences.

De nombreux travaux en didactique des mathématiques ont mis en évidence des difficultés d'apprentissage et d'enseignement importantes en algèbre.

Ces travaux en didactique de l'algèbre montrent la complexité multidimensionnelle de l'algèbre (Grugeon, 1995). Ils font notamment ressortir la nécessité d'une négociation de l'articulation numérique/algébrique et de la rupture entre les procédures arithmétiques et les procédures algébriques (Chevallard, 1985, 1989).

De nombreuses recherches ont mis en évidence des conceptions erronées, récurrentes et résistantes chez les élèves. Certains d'entre eux mobilisent spontanément une *conception procédurale* (Sfard et Linchevski, 1994) et évoluent difficilement vers une *conception structurale*, nécessaire notamment au bon traitement de certaines équations, celles où se trouvent des inconnues dans les deux membres. Nous l'avons repéré, même dans des classes de première S, lors d'évaluations diagnostiques passées avec le logiciel APLUSIX (Bouhineau et al, 2003).

Enfin l'articulation des caractères outil et objet (Douady, 1984) est aussi une dimension sensible, notamment dans le cas des équations (Bronner et Noïrfalise, 2001).

Les problèmes de dénotation et de sens des expressions et des règles algébriques, soulevés par divers auteurs (Arzarello et al. 2001, Drouhard 1992), amènent une complexité importante de ce domaine d'apprentissage. Drouhard (1992) désigne certains élèves par l'expression « calculateurs aveugles » : pour ces élèves les expressions ne dénotent pas un même objet numérique ou algébrique et n'utilisent pas des transformations valides.

Si de nombreux travaux analysent les difficultés d'apprentissage, cependant, du point de vue de l'aide à l'enseignement, on peut noter une moindre présence d'ingénieries signifiantes et globales, les travaux se centrant davantage sur l'analyse de pratiques comme celle de Coulange (2000) à propos des systèmes d'équations. Enfin, les séquences analysées présentent peu de dispositifs validant le travail de l'élève ou fournissant des rétroactions en dehors des réactions du professeur lui-même.

3.8.1.3 Quelles stratégies observe-t-on en général ?

Conformément aux instructions des programmes rappelées plus haut, on note bien une progressivité sur le travail sur les types de problèmes et sur les règles algébriques de la classe de sixième à celle de seconde. La stratégie générale qui se dégage d'une analyse des manuels consiste à introduire les règles, soit par enseignement direct, soit par ostension, puis à les appliquer dans des exercices. Par exemple, on pourra faire « découvrir la première identité remarquable par découpage de carrés et rectangles », puis l'institutionnaliser, et enfin l'appliquer. Implicitement, après la mise en évidence des règles, l'apprentissage se fonde sur un caractère répétitif favorisé par l'aspect calculatoire de l'algèbre.

3.8.2 Spécifications de stratégies d'enseignement

3.8.2.1 Grands axes de spécifications au niveau des enjeux mathématiques et didactiques

En s'appuyant sur l'approche anthropologique de Chevallard (1999), dans laquelle on distingue les organisations mathématiques et les organisations didactiques, nous définissons nos stratégies en spécifiant tout d'abord les axes suivants :

- Le contexte institutionnel,
- Les intentions didactiques,
- Les contenus mathématiques,
- L'organisation didactique à mettre en place,
- Les modes d'interaction à choisir (tutorat ou non, type de validation ou de rétroaction...).

3.8.2.2 Intégration en différentes institutions, différentes utilisations et contextes divers

L'environnement informatique d'APLUSIX a été utilisé spontanément par des enseignants pour des activités de remédiation en algèbre, dans le cadre de l'aide individualisée en classe de seconde (Bronner et al, 2003). Nous souhaitons montrer, à travers nos travaux, que le logiciel APLUSIX est

bien plus qu'un outil de remédiation en algèbre. D'autres types d'usages didactiques sont possibles, comme des activités d'étude et de recherche avec des moments de première rencontre d'élaboration de techniques ou de théories (Chevallard, 1999), destinées à introduire des nouvelles connaissances algébriques dans la classe.

Les stratégies pédagogiques que nous concevons peuvent être destinées à être mises en œuvre par un professeur ou un tuteur artificiel dans des contextes très différents comme :

- Élèves à la maison ou dans l'établissement en libre service ;
- Élèves seuls encadrés par un professeur, par exemple lors d'une séance d'aide individualisée comme en classe de seconde avec un petit groupe d'élèves ;
- Élèves dans le cadre d'une séance d'enseignement sous la direction d'un professeur.

3.8.2.3 Intentions didactiques

Les stratégies didactiques peuvent être orientées vers des remédiations (correction de connaissances erronées) ou l'introduction de nouveaux concepts, voire des séances d'entraînement.

Nous tenons compte des connaissances initiales des élèves, en nous basant soit sur une étude diagnostique préalable, soit sur des modèles connus en didactique, soit sur les résultats produits par cette recherche cognitive, règles erronées ou conceptions.

Nous distinguons, en première approche, pour cette spécification, que nous noterons D, les possibilités suivantes :

- D1 : Faire apprendre seul de nouvelles connaissances ;
- D2 : Proposer une séance d'entraînement ;
- D3 : Effectuer un diagnostic ;
- D4 : Effectuer un diagnostic suivi d'une remédiation ;
- D5 : Faire découvrir une nouvelle notion ou une nouvelle règle dans le cadre de la classe.

3.8.2.4 Le contenu mathématique

En tenant compte des problématiques et de l'épistémologie de l'algèbre, une activité ou une liste d'exercices proposée aux élèves peut être construite selon deux organisations :

- Soit l'activité se centre sur un unique type de problème algébrique (calculer, développer, factoriser, résoudre, en lien avec des règles à introduire ou à faire utiliser) comme sur la liste de la figure 36.

$$\boxed{3(x-1) - \frac{4}{3}(x+5) = \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{2,5x - (5-3x) \leq 2(x+3)} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{2(5x+3)(x-7) = (15x+9)(3x+1)} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{2\sqrt{5}x - 8\sqrt{5} = \sqrt{5}x + 4 - 2\sqrt{20}} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{25x^2 = 121} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{\frac{8}{x} = \sqrt{7}} \text{ Résoudre}$$

$$\boxed{\frac{3(x^2-16)}{x+4} = 1} \text{ Résoudre}$$

Figure 36. Un exemple de liste d'exercices sur le de problèmes « résoudre » en première S.

- Soit l'activité est relative à un thème du programme de la classe comme : décimaux, fractions, radicaux, identités remarquables, puissances... L'activité comporte alors différents types de problèmes algébriques. La figure 37 montre une liste d'exercices correspondant au thème « racines carrées » de la classe de seconde.

$5\sqrt{18} + 3\sqrt{8} + 7\sqrt{128}$	calculer
$(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$	Calculer
$\sqrt{\frac{9}{5}} \times \sqrt{\frac{20}{81}}$	Calculer
$\frac{4}{3 - \sqrt{2}}$	Calculer
$(x + \sqrt{5})^2$	Développer
$(x - \sqrt{2})(x + 5) + 3\sqrt{2}(x + 5)$	Factoriser
$3\sqrt{5}x + 3 = 15 - 2x - \sqrt{2}$	Résoudre

Figure 37. Un exemple de thème « Racines carrées niveau Seconde »

Les deux exemples précédents, qui s'inscrivent chacun dans des organisations mathématiques différentes, montrent qu'une activité nécessite un choix relativement à des variables dont certaines sont didactiques (Brousseau, 1986). Quelques-unes interviennent dans la plupart des activités comme :

- v1 = Niveau institutionnel (6^e, 5^e...);
- v2 = Types de nombres (entiers, décimaux, rationnels...);
- v3 = Types d'écritures (décimale, fractionnaire...)
- v4 = Degré des expressions ou des équations.

D'autres sont spécifiques, comme l'opacité du facteur commun pour le type « factoriser ».

Une activité nous amène donc à nous positionner sur la spécification du contenu mathématique, que nous nommons M. Une activité ou un exercice, du point de vue de l'organisation mathématique, apparaît comme un résultat M(T, v1, v2, ...) relativement aux deux axes :

- « Thèmes » ou « types de problèmes »
- Valeurs des variables (communes ou spécifiques).

3.8.2.5 Le scénario

Il s'agit de préciser ici l'organisation didactique à mettre en place et les modes d'interactions avec le professeur et l'EIAH. En nous référant à la théorie des situations de Brousseau (1986) nous considérons un apprentissage comme un état d'équilibre d'interactions d'un élève avec un certain milieu. Le scénario des activités doit ainsi définir les types d'interactions dans la situation proposée aux élèves. Le professeur peut-il intervenir en dehors de la présentation des consignes ? Quels types de validation et de rétroaction sont prévus au niveau de l'EIAH APLUSIX ? L'interaction est-elle de type tutorat ou plutôt basée sur une situation problème ?

Nous prenons en compte la médiation spécifique par un EIAH. L'environnement APLUSIX apporte un certain nombre de contraintes épistémologiques, didactiques et ergonomiques, mais offre aussi la possibilité d'agir précisément sur les potentialités par de nombreux paramètres généraux ou avancés. En particulier, il est possible de préciser certains modes relatifs à l'édition, à la rétroaction sur la validation du calcul en cours ou du résultat final, à la mise à disposition de commandes de calcul laissées aux élèves.

Les paramètres permettent de configurer finement l'EIAH APLUSIX.

- Pour la vérification des calculs, la vérification de l'équivalence peut s'effectuer en permanence ou à la demande de l'élève, ou encore ne pas s'effectuer (en mode « test »). La vérification de l'équivalence « à la demande » peut se faire sur l'ensemble des transitions de calculs ou sur la transition courante.

- Pour l'édition, une petite flèche et la touche « entrée » permettent de passer à une nouvelle étape de deux manières : la nouvelle étape est vide ou c'est une duplication de l'étape courante. La frappe d'une parenthèse ouvrante « (» au clavier produit ou non automatiquement la parenthèse fermante «) ». La frappe de « / » au clavier produit ou non automatiquement une fraction avec un numérateur et un dénominateur vides. Pour les deux paramètres « petite flèche » et « vérification automatique des calculs », le professeur peut laisser le choix à l'élève. Pour les deux paramètres « petite flèche » et « vérification automatique des calculs », le professeur peut laisser le choix à l'élève comme on peut le voir sur la figure 38.

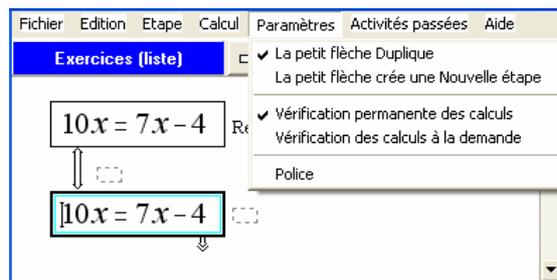


Figure 38. Des paramètres au niveau du professeur ou des élèves.

- Des commandes de calcul peuvent être proposées aux élèves. On peut choisir le domaine d'application de la commande « Calculer » parmi le calcul sur les entiers, le calcul sur les rationnels, le calcul sur les décimaux ou encore le calcul sur les radicaux. On peut activer, ou non, une commande « Développer » ou encore une commande « Factoriser ». Pour cette dernière le domaine d'application peut être de deux types : polynômes d'une variable de degré inférieur ou égal à 1 ou 2. Il existe aussi une commande « Résoudre » dont le domaine d'application peut être choisi entre les équations d'une variable de degré inférieur à 1 ou celles de degré inférieur à 2. La figure 39 montre un choix de paramètres sur ces commandes de calculs.

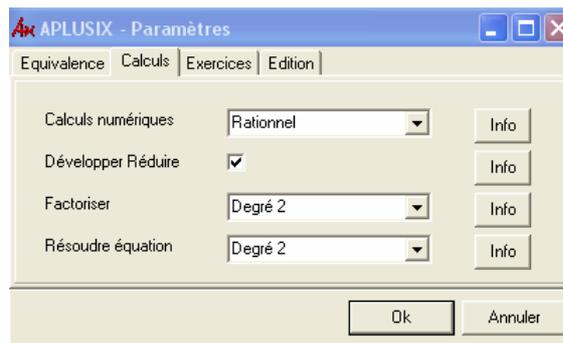


Figure 39. Des paramètres au niveau des commandes de calcul à configurer par le professeur

- Lors des activités d'exercices, divers paramètres peuvent modifier le scénario et les interactions : l'ordre des exercices peut être aléatoire, l'élève peut être fortement incité à commenter le passage entre deux étapes, il peut accéder ou non à la solution.

Un scénario est une fonction de plusieurs paramètres $S(p_1, p_2, \dots)$, par exemple :

p_1 : Mode de vérification des étapes

p_2 : Mode de vérification du résultat final et accès au résultat final

p_2 : Modules de calcul

- p3 : Choix d'édition
- p4 : Ordre des exercices
- p5 : Paramètres d'édition (passage entre étapes, parenthèses, fraction)
- p6 : Mode test ou non
- p7 : Temps de passation

Le scénario est lié aux intentions didactiques et au contenu mathématique : certains paramètres découlent du choix sur D et M et d'autres sont plus indépendants.

3.8.2.6 Un modèle général de stratégie didactique avec APLUSIX

En réunissant les différentes spécifications précédentes on obtient un modèle de stratégie didactique $S(D, M, s)$ fonction des trois grands axes définis précédemment, et que l'on peut schématiser comme dans la figure 40.

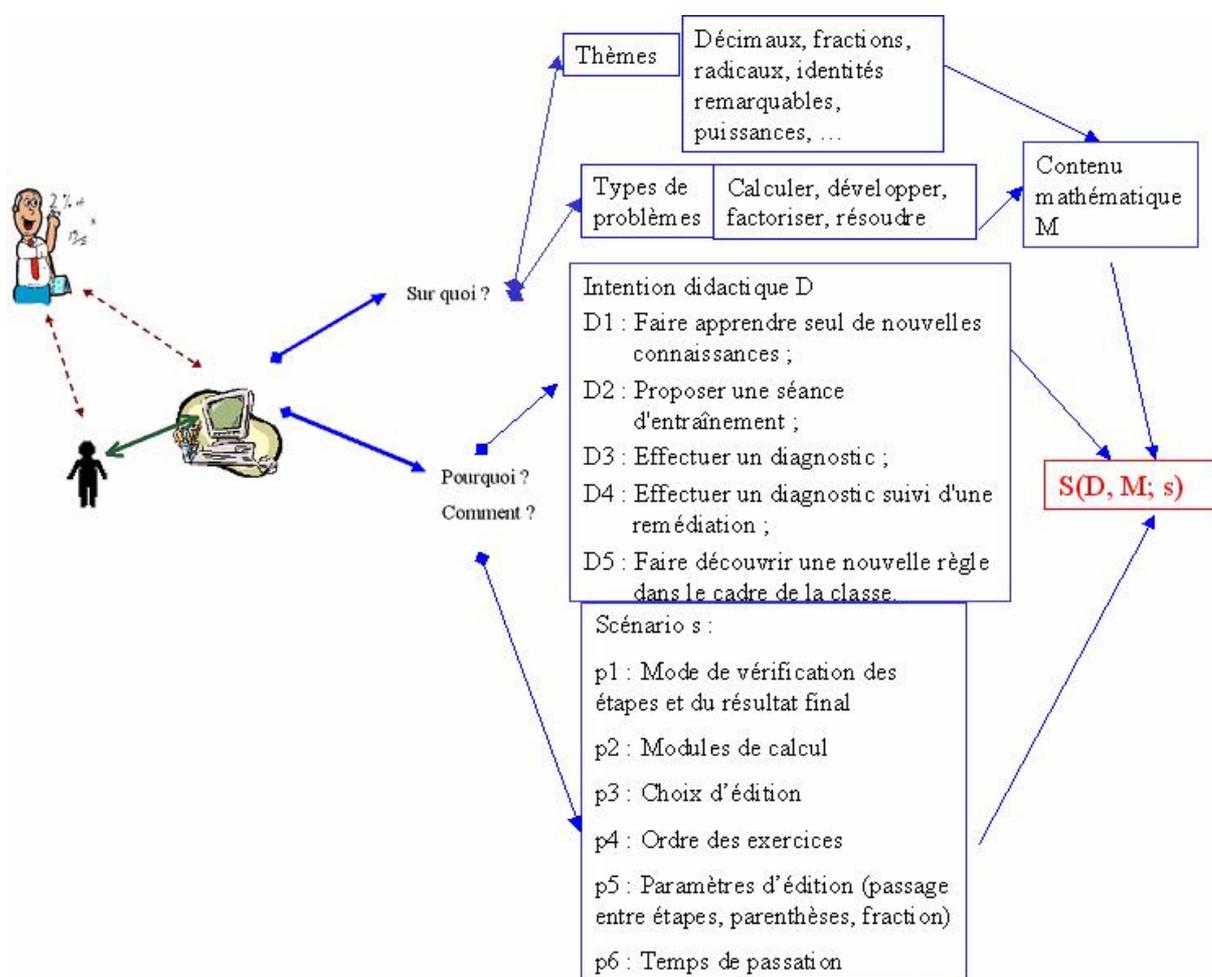


Figure 40. Le modèle général de stratégie didactique

3.8.3 Exemples de stratégies d'enseignement

3.8.3.1 Apprendre de nouvelles connaissances dans le cadre de la classe : le cas de la double distributivité en 4^e

Nous allons montrer, sur un exemple, un type de stratégie s'appuyant sur l'environnement APLUSIX, dont le but est de faire acquérir une nouvelle règle algébrique de type « identité remarquable ».

1) Intention didactique

Il s'agit d'amener les élèves d'une classe de quatrième à construire « la règle dite de la double distributivité » en prenant appui sur la règle de distributivité vue en cinquième et réétudiée au préalable en quatrième.

Les élèves sont confrontés à des nouvelles situations mathématiques et disposent de règles déjà étudiées en classe (calcul, distributivité simple...). Des activités précédentes ont amené également la certitude que le logiciel APLUSIX validera ou invalidera leur proposition à chaque étape. C'est un élément capital de ce type d'activité par rapport au support papier-crayon. L'activité en serait transformée sans cette potentialité.

2) Le contenu mathématique

Le contenu mathématique correspond au premier choix, autrement dit nous envisageons ici un seul type de problème. En effet, 3 listes d'exercices ont été construites sur le même type de problème « développer ». En effet, 3 listes d'exercices (figures 41 et 42) ont été construites sur le même type de problème « développer ».

Dans la première liste (voir figure 41), les deux premiers exercices ne font appel qu'à des règles normalement connues des élèves. L'exercice 3 présente le saut vers la connaissance nouvelle pour réussir la transformation. Les élèves rencontrent une difficulté nouvelle et ils doivent développer ce type d'expression en faisant appel aux règles qu'ils connaissent. L'exercice 4 n'est là que pour conforter leur travail et peut-être pour commencer à élaborer dans l'action une nouvelle règle, ou du moins un nouveau processus qu'ils viennent de mettre en oeuvre. C'est à l'exercice 5 que les élèves vont devoir faire preuve d'abstraction pour conjecturer une nouvelle règle et par la même occasion la démontrer. Les exercices 6 et 7 font alors office de test et d'application de cette règle.

Les expressions de cette première liste sont, en dehors des deux premiers exercices, de la forme $(ax+b)(cx+d)$ avec des coefficients entiers. Ce n'est que dans les autres listes que nous jouons pleinement sur d'autres variables didactiques, comme la nature et l'écriture des coefficients, le nombre de termes et l'introduction de termes carrés.

3) Scénario

L'activité est programmée selon un déroulement classique à quatre phases.

- Phase 1 : Installation

L'activité se déroule en salle informatique. Le professeur distribue une fiche (cf. figure 43) aux élèves décrivant les conditions de travail dans l'environnement APLUSIX et guide selon les besoins certains élèves pour la mise en route du logiciel. En particulier il y a une consigne particulière de travail entre les exercices 4 et 5 de la première liste.

- Phase 2 : Travail individuel ou en groupe sur les exercices du fichier 1 (première liste)

L'activité étant maintenant lancée, le professeur donne éventuellement quelques conseils sur la mise en forme des calculs (utiliser le copier-coller, le glisser-déplacer, etc.) mais de façon ponctuelle et personnelle, afin de ne pas gêner le reste de la classe. Chaque élève avance à son rythme.

- Phase 3 : Institutionnalisation

A la fin de la première liste d'exercice, un bilan est fait par le professeur avec le groupe classe, afin d'institutionnaliser la règle de la double distributivité que les élèves devraient découvrir. Cette étape a pour but de valider cette règle au niveau de la classe et de permettre également à ceux qui

n'ont pas abouti dans leurs recherches de poursuivre l'activité. Il faut cependant ne pas trop précipiter ce moment afin de ne pas limiter l'activité de recherche.

- Phase 4 : Exercices d'application

Ensuite les élèves pourront, en autonomie complète, effectuer la liste d'exercices 2, éventuellement la liste d'exercices 3, ce qui permettra également de gérer l'hétérogénéité éventuelle de la classe.

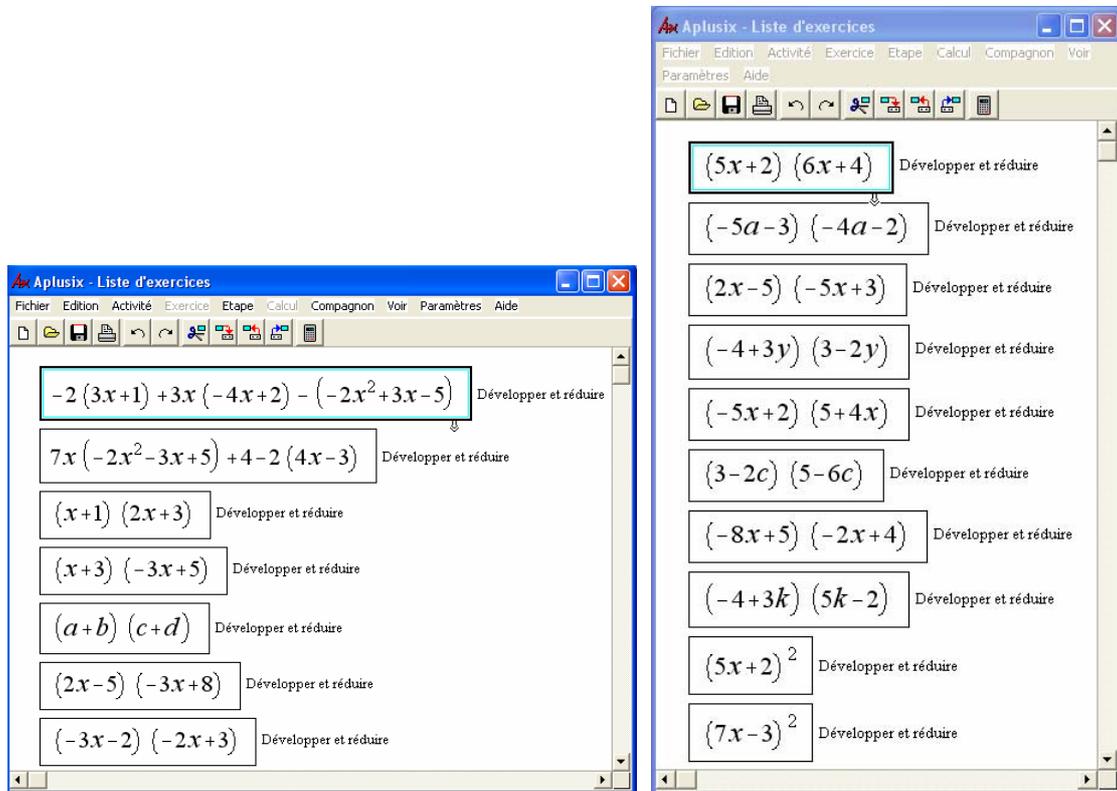


Figure 41. Listes d'exercices 1 et 2 (fichiers *dd-1.exo* et *dd-2.exo*).

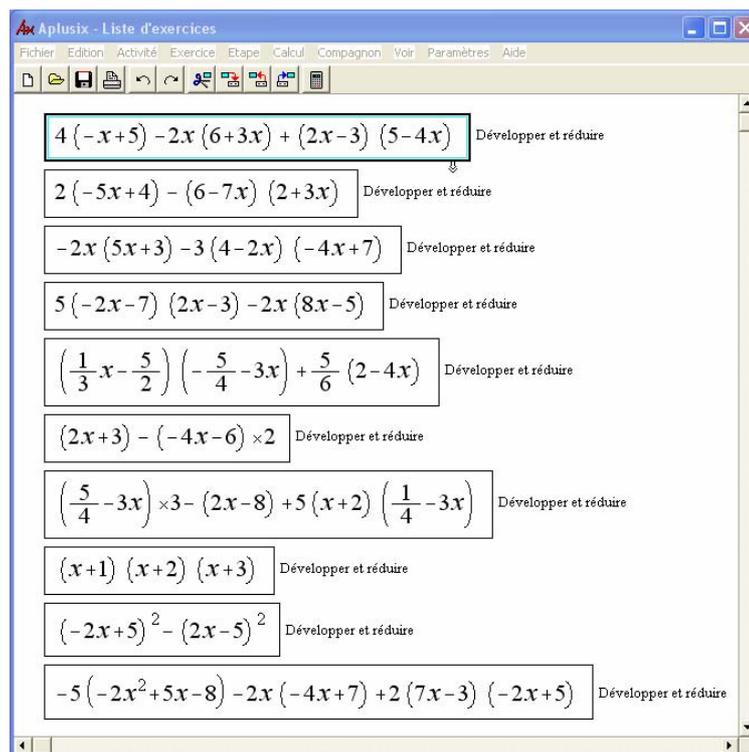


Figure 42. Liste d'exercices 3 (le fichier *dd-3.exo*.)

Aujourd'hui vous aurez à faire trois séries d'exercices.
Cliquez sur **FICHIER** puis sur **CHARGER EXERCICES A RESOUDRE**, allez dans le dossier **EXERCICES** et choisissez le fichier *dd-1.exo*.

ATTENTION, avant de terminer l'exercice 5, vous devez effectuer la manipulation suivante :

Cliquez sur **ETAPE**

Puis sur **NOUVELLE ETAPE DETACHEE**

Et entrez sous la forme d'une égalité la règle que vous pensez avoir trouvée.

Ensuite, cliquez sur la dernière étape du calcul précédent et terminez l'exercice.

Ecrivez ici la règle trouvée :

.....

Nous ferons ensuite une mise en commun de ce que vous avez trouvé avant de continuer.

Une fois la première fiche d'exercice terminée, cliquez sur **FICHIER** puis sur **CHARGER EXERCICES A RESOUDRE**, allez dans le dossier **EXERCICES** et choisissez le fichier *dd-2.exo*.

Une fois cette liste terminée, faites la même manipulation et choisissez le fichier *dd-3.exo*.

Figure 43. Fiche distribuée aux élèves.

4) La configuration de l'environnement

Les différentes phases de travail avec APLUSIX se déroulent avec le même paramétrage suivant :

La vérification de l'équivalence se fera en permanence pour que l'élève puisse avoir des résultats validés pour faire ses conjectures. Au niveau de l'édition, la nouvelle étape est vide mais cela pourrait être changé selon la familiarité des élèves avec les fonctionnalités de l'édition. Aucune commande de calcul n'est fournie car les élèves ont à faire des transformations ou des calculs élémentaires, les coefficients sont simples, au moins dans un premier temps. L'ordre des exercices n'est pas aléatoire et suit celui de la liste, car il y a une progression à respecter pour rentrer dans l'activité et ses enjeux.

On peut cependant paramétrer différemment la troisième liste d'exercices, en activant seulement une vérification à la demande, afin de pouvoir tester le degré d'acquisition de la règle étudiée et plus généralement des règles utilisées en calcul littéral.

5) Quelques éléments d'analyse sur cette stratégie et son expérimentation dans une classe de quatrième

Contrairement à une activité habituelle en classe où les structures de contrôle de l'élève sont, en général, constituées par ses connaissances et les réactions éventuelles du professeur, l'environnement APLUSIX apporte une certaine autorité extérieure du point de vue de la validation. En effet, le logiciel réagit à chaque instant en précisant l'équivalence ou non de l'étape proposée, ce qui est une relation au milieu essentielle de cette activité de recherche.

Dans les exercices 3 et 4, les élèves tâtonnent quelque peu avant d'aboutir à la solution. Certains essaient de mobiliser des règles connues, ce qui est un comportement pertinent. D'autres écrivent des expressions pour lesquelles il est difficile de comprendre leur raisonnement. Il est possible qu'au démarrage de l'activité, ils remplissent simplement le contrat de « fournir une réponse ».

Analysons de plus près l'interaction entre un élève et l'environnement, lors de la rencontre des premières expressions des exercices 3,4 et 5 de la première liste. Nous donnons ci-dessous (figure 44) des étapes significatives de l'évolution du travail de cet élève dans cette activité.

$\boxed{(x+1)(2x+3)}$ Développer et réduire * $\boxed{x+1 \times 2x+3}$	<p>Dans un premier temps, l'élève supprime simplement les parenthèses autour des deux expressions. APLUSIX ne valide pas cette transformation.</p>
$\boxed{(x+1)(2x+3)}$ Développer et réduire * $\boxed{x+1 \times 2x+x+1 \times 3}$	<p>Ce second essai est proche de ce qui est attendu, mais il manque les parenthèses autour des termes $x+1$. On peut se demander si l'élève n'a pas mobilisé la règle de distributivité en oubliant simplement d'écrire le terme $x+1$ entre parenthèses.</p>
$\boxed{(x+1)(2x+3)}$ Développer et réduire * $\boxed{1x \times (-1) + 3 \times 2x \times 3 + 1}$	<p>L'élève semble avoir été déconcerté par la réponse précédente du logiciel et tâtonne en proposant d'autres expressions</p>
$\boxed{(x+1)(2x+3)}$ Développer et réduire \parallel $\boxed{(x+1) \times 2x + (x+1) \times 3}$	<p>C'est donc au septième essai que l'élève aboutit à une expression équivalente à la première.</p>
$\boxed{(x+1)(2x+3)}$ Développer et réduire \parallel $\boxed{(x+1) \times 2x + (x+1) \times 3}$ \parallel $\boxed{2x^2 + 2x + 3x + 3}$ \parallel $\boxed{2x^2 + 5x + 3}$	<p>L'élève aboutit ensuite à une expression développée et réduite, il reprendra cette méthode dans l'exercice 4.</p>
$\boxed{(a+b)(c+d)}$ développer_Réduire \parallel $\boxed{(a+b) \times c + (a+b) \times d}$ \parallel $\boxed{ca+cb+da+db}$ \parallel $\boxed{ac+bc+ad+bd}$ $\boxed{(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd}$	<p>EXERCICE 5 ECRITURE DE LA REGLE</p> <p>Pour l'exercice 5, il s'agissait de développer l'expression $(a+b)(c+d)$ afin de conjecturer et prouver la règle de la double distributivité.</p> <p>Cette règle est alors écrite dans une étape détachée. Ici l'élève a rapidement développé l'expression proposée et en a déduit la règle voulue.</p>

Figure 44. Evolution du travail d'un élève.

Ces tâtonnements amènent la plupart des élèves à découvrir une nouvelle règle de calcul. Ils vont également, par la même occasion, être obligés de démontrer cette règle. C'est là un apport essentiel du logiciel APLUSIX dans ce type d'activité de recherche.

On peut se demander comment aurait évolué cette même activité sans l'utilisation du logiciel, uniquement avec un support papier crayon. On peut faire l'hypothèse que, dans un environnement papier-crayon habituel, les élèves auraient rapidement arrêté leur recherche en validant la première expression et auraient continué le calcul avec celle-ci. Les travaux de recherche montrent comment des règles pourtant établies deviennent fragiles dans des situations peu habituelles. Un élève en difficulté est souvent poussé à transgresser les règles mathématiques, pour peu qu'il écrive une

expression ayant une certaine cohérence ou conformité de surface avec celle de départ. Une fois encore, sans l'intervention du logiciel, certains élèves auraient continué leur calcul et auraient produit un résultat proche des erreurs que l'on observe habituellement.

Le logiciel ne validant que les expressions équivalentes, et qui s'obtiennent en général (mais pas toujours) à l'aide de règles valides, favorise un questionnement du type : « quelles sont les règles dont je dispose ? Comment puis-je les appliquer dans l'expression qui m'est proposée ? » C'est ici que réside un des principaux intérêts de l'utilisation de ce logiciel dans ce type d'activité. Les élèves vont fournir un réel travail d'étude et de recherche en mobilisant au mieux leurs connaissances sous les contraintes de l'environnement. Ce type de stratégie, que nous avons mis en œuvre dans plusieurs expérimentations, ouvre des pistes importantes pour la construction de nouveaux savoirs algébriques de type « identité remarquable ».

3.8.3.2 Remédiation : Un exemple en classe de seconde

Nous présentons, sur un exemple, les caractéristiques d'un type de stratégie, s'appuyant toujours sur de l'environnement APLUSIX, dont le but est de retravailler certaines connaissances déjà vues antérieurement.

1) Intention didactique

Dans ce type de stratégie didactique, en classe de seconde, l'objectif est d'exploiter les potentialités de l'environnement APLUSIX pour une reprise d'étude sur des types de problèmes « factoriser », « résoudre une équation » et « résoudre une inéquation », déjà travaillés au collège. Il s'agit aussi d'amener les élèves à une réflexion sur les règles algébriques utilisées et sur la justification des calculs effectués.

Ce type de stratégie convient bien en classe de seconde et, notamment, dans le cadre de l'aide individualisée, dispositif institutionnel de l'enseignement en France en début de lycée.

Nous avons négocié une expérimentation avec un professeur de seconde, en lui proposant notamment d'utiliser la potentialité d'APLUSIX : « demande de commentaires ».

2) Le contenu mathématique

Il s'agit d'un dispositif à deux groupes en fonction d'un diagnostic effectué préalablement par le professeur, en se servant éventuellement du logiciel APLUSIX. Le premier groupe est constitué d'élèves n'ayant pas de grosses difficultés au niveau des techniques et de l'application des règles en calcul algébrique. En général, leurs erreurs sont dues à une absence de contrôle ou d'oublis, tandis que, dans le second groupe, sont regroupés les élèves montrant des difficultés plus importantes au niveau des types de problèmes retenus. La constitution des deux groupes se base sur les résultats du diagnostic effectué.

Une liste spécifique d'exercices (figure 45) est réalisée pour chacun des deux groupes et sera chargée automatiquement lors du lancement du logiciel.

Liste d'exercices du 1 ^{er} groupe (fort)	Liste d'exercices du 2 ^e groupe (faible)
$(x-1)^2 = (x-1)$ Résoudre	$2(x+3) = x-1$ Résoudre
$3(x+2) + 4 \leq 4x - 12$ Résoudre	$(x+1)^2 - (3x+1)(x+1)$ Factoriser
$2(x+1)(2x-3) - (x+1)^2$ Factoriser	$3(x+4) - 2x \leq 4x + 7$ Résoudre
$(y+2)^2 = 20$ Résoudre	$x^2 = 9$ Résoudre
$(3x-4)^2 - (x+1)(3x-4)$ Développer	$(x+6)^2 - (x+6)$ Factoriser
$9x^2 = 3$ Résoudre	$(2x-5)^2 - (x-3)(x+3)$ Développer
$\frac{2}{3}(x+1) - \frac{1}{6} = x$ Résoudre	

Figure 45. Listes d'exercices des deux groupes.

Les listes d'exercices sont ici limitées à sept exercices pour le premier groupe (groupe dit « fort ») et six pour le second (dit « faible »). L'intérêt principal de cette séance se trouve dans la justification du calcul par les élèves et dans leur réflexion au niveau de la règle algébrique utilisée. Si les listes d'exercices relèvent des mêmes types pour les deux groupes, le niveau de difficulté varie, les élèves ne feront pas le même travail. Les listes diffèrent par le nombre et le niveau de difficulté des exercices relativement à certaines variables didactiques (les identités remarquables devant être mobilisées, la prise en compte ou non du signe (-) pour factoriser, la présence ou l'absence d'autres facteurs en second terme que le facteur commun, le signe du facteur multiplicatif dans les inéquations, la nature des coefficients...).

On prévoit que les élèves qui n'ont pas trop de difficultés en algèbre, comme ceux du premier groupe, devraient travailler assez vite. Mais, pour tous, les questions qu'ils devraient se poser pour justifier une transformation doivent les faire réfléchir sur les étapes de résolution d'un exercice d'algèbre.

3) le scénario

Les élèves travaillent en autonomie complète dans l'environnement APLUSIX. Le milieu n'est pas seulement constitué des expressions, des consignes données aux élèves et de l'EIAH APLUSIX, mais aussi d'une fiche de règles fournie par le professeur : ces règles sont numérotées (cf. figure 46) de manière à pouvoir s'y référer plus facilement pendant le travail.

4) La configuration de l'environnement

Si les élèves peuvent être assurés à chaque étape de leur raisonnement sur la validité de la transformation des expressions, le logiciel étant mis en mode « vérification permanente », pour autant ils ne sont peut-être pas capables de formuler leurs actions et d'explicitier les théorèmes algébriques qui les rendent effectivement valides. En effet, les techniques ne sont pas encore bien assurées à ce niveau, surtout dans le groupe faible, et il s'agit donc d'objectiver les actions entreprises et de les fonder en les mettant en rapport avec ce qui constitue les théorèmes algébriques.

Pour cela le professeur va exploiter les possibilités des dernières versions du logiciel et demander deux types de commentaires aux élèves (voir des exemples ci-dessous à la figure 46) :

- Un premier (au niveau du commentaire de transition) concerne la formulation des actions des élèves dans le registre de la langue. Par exemple : « j'ai multiplié les deux membres de l'égalité par 3 » ou « j'ai mis en évidence le facteur commun ».

- Une seconde formulation (au niveau du commentaire d'étape) doit expliciter les règles algébriques utilisées, prises dans le formulaire distribué aux élèves et identifiées par leurs numéros.

<p>Soient a, b, c et d réels</p> <p>Règle 1 : $ab + ad = a(b + d)$</p> <p>Règle 2 : $ab - ad = a(b - d)$</p> <p>Règle 3 : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$</p> <p>Règle 4 : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$</p> <p>Règle 5 : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$</p> <p>Règle 6 : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$</p> <p>Règle 7 : b est supposé différent de 0, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$</p> <p>Règle 8 : b et d sont supposés différents de 0, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$</p>	<p>Règle 9 : b, c et d supposés non nuls $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$</p> <p>Soient a et b réels positifs,</p> <p>Règle 10 : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$</p> <p>Règle 11 : $(\sqrt{a})^2 = a$</p> <p>Règle 12 : $\sqrt{a^2} = a$</p> <p>Règle 13 : b est supposé non nul, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$</p> <p>Soient a et b réels, n et m entiers naturels</p> <p>Règle 14 : $(ab)^n = a^n b^n$</p>
<p>Soient a et b réels, n et m entiers naturels</p> <p>Règle 15 : b est supposé non nul, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Règle 16 : $a^n \times a^m = a^{n+m}$ Règle 17 : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$</p> <p>Règle 18 : Si on <i>ajoute / soustrait</i> un même nombre à chaque membre de l'inéquation, on ne change pas le sens de l'inégalité.</p> <p>Règle 19 : Si on <i>multiplie / divise</i> chaque membre de l'inéquation par un même nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.</p> <p>Règle 20 : Si on <i>multiplie / divise</i> chaque membre de l'inéquation par un même nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.</p> <p>Règle 21 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.</p> <p>Règle 22 : Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en <i>ajoutant</i> ou en <i>retranchant</i> un même nombre aux deux membres de l'équation.</p> <p>Règle 23 : Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en <i>divisant</i> ou <i>multipliant</i> par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.</p>	

Figure 46. Feuille de règles du dispositif de remédiation.

5) *Quelques éléments d'analyse sur cette stratégie et son expérimentation dans une classe de seconde*

Il semble que le contrat n'ait pas été facile à mettre en place. Cette difficulté révèle une certaine rupture avec le contrat en usage dans la classe comme en témoigne le professeur : « Tout d'abord, face à ce nouveau travail, les élèves ont eu du mal à comprendre les consignes et ce que j'attendais réellement de leur part. Une fois qu'ils se sont mis au travail, j'ai réalisé que faire un tel travail leur demandait énormément de concentration et de réflexion. Ils ont donc fait peu d'exercices, pour le premier groupe les meilleurs sont arrivés à quatre exercices (sur sept) et pour le second groupe les plus rapides en ont fait trois ». La demande d'explicitation des règles a conduit à la rupture la plus forte : « Finalement le plus difficile pour l'élève était d'identifier la règle utilisée, quel que soit son niveau ». Les attitudes des élèves ont été très différentes selon les groupes. Les meilleurs élèves savaient résoudre la plupart des exercices et ne voyaient pas l'intérêt de repérer la règle demandée. Ils considéraient alors qu'ils perdaient du temps à écrire les commentaires demandés. Le professeur cite le cas d'un « bon » élève, Etienne, dont on peut voir dans la figure 47 la résolution du premier exercice : cet élève connaît assez bien les stratégies de résolution mais a du mal à expliquer ses actions. De plus, à la première étape du premier exercice, il ne donne pas ou n'arrive pas à identifier une règle qui justifie la première transformation et, à la dernière étape, il considère qu'il utilise « une règle élémentaire de calcul », alors qu'il s'agit d'une règle fondamentale de la résolution des équations (étiquetée comme règle 22 dans la liste à la figure 46).

Une première raison peut être la non conformité entre l'action et les règles proposées, comme on le développera plus loin avec un autre élève. De plus, pour cet élève du groupe « fort », selon le professeur, cette étape n'est plus une tâche problématique (Chevallard 1999), il en a complètement automatisée sa résolution. Cette naturalisation lui rend peut-être encore plus difficile et inutile le repérage d'une règle. Pour ce genre d'élève, le contrat est difficile à négocier et l'attrait, ainsi que l'apprent, informatique ne suffit pas en apparence. Des élèves de ce groupe comme Etienne repèrent les

règles principales qui constituent encore l'enjeu de l'apprentissage et moteur de la résolution et passent rapidement sur les autres règles.

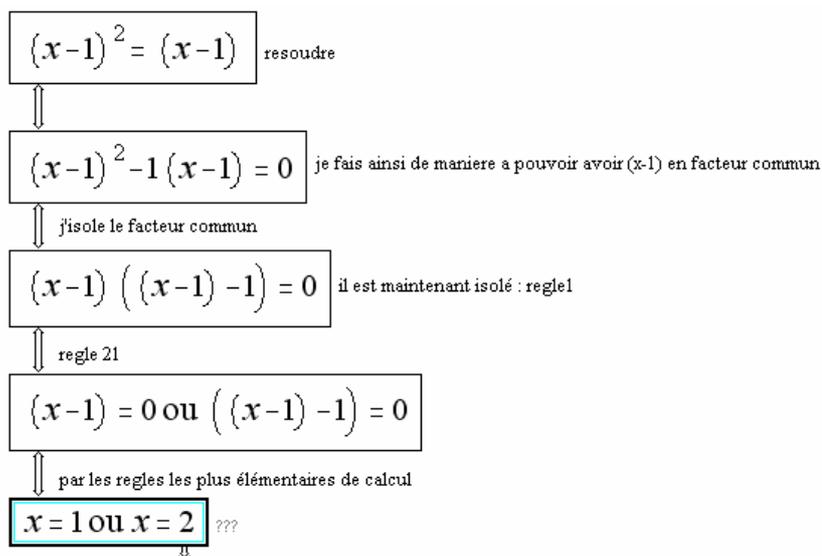


Figure 47. Réponse de l'élève Etienne du groupe dit « fort ».

En revanche, le professeur qui a mené cette expérimentation pense que les élèves de niveau un peu plus faible en algèbre ont réellement cherché à comprendre ce qu'ils faisaient et pourquoi ils le faisaient : « Ils ont véritablement cherché à justifier leur calcul par les règles. Je pense qu'ils ont même découvert des règles algébriques. Et ce travail a été, je pense, un vrai travail de remédiation. » Par exemple, Carole a mis du temps à résoudre chaque exercice, mais elle a respecté globalement le contrat en citant une règle à chaque étape quand elle le pouvait et a essayé d'expliquer ce qu'elle a fait. Le professeur précise qu'à chaque étape, elle relisait pratiquement entièrement la feuille des règles.

L'observation au magnétoscope (figure 48) montre aussi qu'à chaque étape, Carole effectue d'abord les transformations, elle indique ensuite une règle en commentaire de transition et enfin décrit ses actions en commentaire d'étape en essayant d'être conforme à la règle choisie. Cette conformité ne peut être atteinte en permanence. A la deuxième étape, elle cite la règle 22 qui est une règle d'équivalence par ajout alors qu'elle met en œuvre plutôt une transposition (« J'ai fait passer les x d'un côté »). Cependant, elle rattache cette action à une règle compatible à son action. On peut penser que cette demande de commentaires, cadrée selon les consignes données, permet une certaine objectivation de son raisonnement. C'est peut-être lors de cette recherche de règles qu'elle a réalisée ce qu'elle avait vraiment fait.

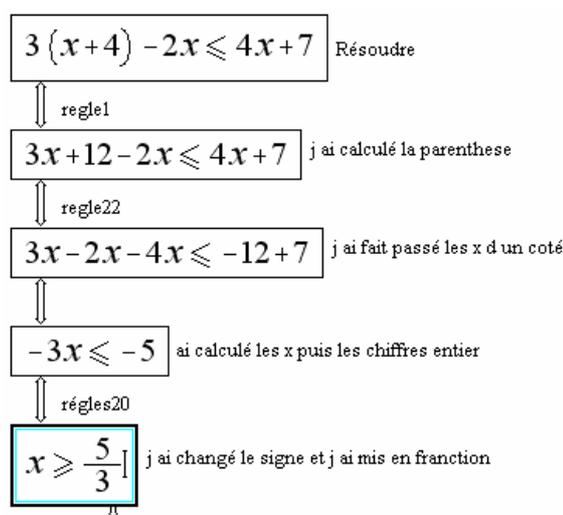


Figure 48. Réponse de l'élève Carole du groupe dit « faible ».

L'interaction relativement à cette dimension théorique de l'activité s'arrête ici, aucune rétroaction n'étant prévue actuellement à ce niveau. Mais c'est une possibilité que nous étudierons dans nos travaux futurs.

Il semble que le dispositif exploitant ces potentialités d'APLUSIX ait permis aux élèves une certaine objectivation de leurs actions et de leur capacité de contrôle sur le milieu, et donc de leurs connaissances. Cette prise de conscience des connaissances de la part de l'élève a été possible ici, par la confrontation à un certain milieu effectif (constitué essentiellement par l'EIAH), la pratique de formulation de commentaires sur l'action et la justification des transformations, et l'usage d'un certain répertoire culturel (la liste de règles). Le logiciel a permis à certains élèves de rentrer dans une pratique de formulation, qui correspond à un autre rapport à la connaissance (Brousseau, 1986).

Avec un tel dispositif, on a quelques premières conditions pour construire une situation de formulation au sens de Brousseau (1986), en allant plus loin dans la justification de leur raisonnement que la rétroaction fondamentale proposée par le logiciel. Une telle recherche de situations reste encore à faire et fait partie des perspectives de recherche.

Nous avons, à travers cet exemple, montré un type de stratégie de type remédiation pour des élèves ayant déjà rencontrés l'algèbre en exploitant certaines potentialités de l'EIAH APLUSIX.

3.8.4 Réalisations de Tuteurs artificiels

Nous développons dans cette partie le deuxième axe de travail sur les stratégies didactiques, à savoir la conception, la spécification de tuteurs artificiels et la réalisation de tuteurs artificiels fonctionnant sur le micromonde APLUSIX, dont la fonction est la remédiation de connaissances ou conceptions repérées dans les travaux sur le diagnostic à la main ou automatique (sections 3.4 et 3.5)

Plusieurs prototypes de tuteurs artificiels ont été envisagés. Certains ont été effectivement réalisés, d'autres sont en voie de réalisation. Les premiers sont des tuteurs simples, ils ont été produits dans un contexte d'avancement des travaux annexes du projet APLUSIX où n'étaient possibles que des diagnostics automatiques faibles, sans production de conceptions d'élèves. Ils ont constitué un travail exploratoire au niveau informatique des interactions possibles entre élèves et tuteur. Les seconds poursuivent un projet plus ambitieux. D'une part, ils ont pour objectif de s'appuyer sur un diagnostic effectif des conceptions d'élèves. D'autre part, ils concernent un travail pluri-disciplinaire de mise en œuvre par intégration d'un travail, côté informatique, de modélisation et de mise en place d'un moteur pour des modèles de tuteur génériques et, côté didactique, d'une instanciation des modèles génériques de tuteur pour avoir des tuteurs effectifs, et non pas des modèles de tuteurs, et pour valider notre démarche au travers d'expérimentations.

3.8.4.1 Principes de conception

Le modèle d'architecture de tuteurs multi-niveaux décrit ci-dessous concerne des tuteurs de remédiation en algèbre, avec tous les implicites que cela peut comporter. En particulier, l'utilisation de ces tuteurs présuppose le diagnostic d'une conception erronée chez un élève. Selon le diagnostic constaté, le modèle d'architecture est activé au niveau le plus haut, déclenchant par suite des niveaux plus bas.

L'architecture de tuteurs comporte 4 niveaux : Tuteur, mini-Tuteur (ou m-Tuteur), micro-Tuteur (ou μ -Tuteur), et nano-Tuteur (ou η -Tuteur) où chaque niveau est relié uniquement aux niveaux immédiatement supérieurs et inférieurs. Généralement, plusieurs liens relient un tuteur de niveau supérieur à des tuteurs de niveau inférieur, chaque tuteur de niveau inférieur pouvant, lui aussi, être relié à plusieurs tuteurs de niveau supérieur, l'ensemble formant un treillis.

Une partie de ces tuteurs est également reliée au diagnostic automatique de conception d'élève.

Le premier niveau de ce découpage est un niveau de gestion globale du processus de remédiation, les 3 niveaux suivants sont organisés plus ou moins selon un découpage de la réalisation d'une tâche algébrique en différents niveaux d'abstractions.

Au 1er niveau se trouve le Tuteur. Le Tuteur a pour but de faire le lien entre les utilisations d'APLUSIX par des élèves, les diagnostics obtenus et l'enseignant gérant sa classe.

Le Tuteur peut être lancé automatiquement en début de session, si le professeur l'a décidé, à l'aide du panneau de configuration d'APLUSIX. Dans ce cas, il observe les conceptions calculées et décide soit de lancer une phase de remédiation sur une conception erronée diagnostiquée, soit de ne rien faire. Le Tuteur peut aussi être actif dans une activité d'exercice, observant à la fin de chaque exercice les conceptions calculées et décidant, le cas échéant, de lancer automatiquement une phase de remédiation selon la situation et un paramètre fixé par l'enseignant. Le Tuteur déclenche les m-Tuteurs pour proposer à l'élève la remédiation d'un m-Tuteur adapté. Le Tuteur doit être relié par ailleurs au diagnostic automatique de conception d'élèves et doit déterminer des situations typiques (exercices) où le comportement de l'élève sera erroné s'il est conforme à la conception calculée. Parmi ces situations, le Tuteur privilégiera celles qui comportent, dans leur définition, des règles correctes à appliquer vis-à-vis d'un problème donné correspondant aux conceptions calculées. Ceci facilitera le travail des tuteurs de niveau inférieurs.

Au 2^e niveau se trouvent les m-Tuteurs. Les m-Tuteurs sont conçus pour aider la résolution d'une classe d'exercices comme : « Résoudre une équation du 1er degré ». Ils s'appuient chacun sur un enchaînement de connaissances stratégiques utilisées pour résoudre correctement les exercices de cette classe. Pour notre exemple « Résoudre une équation du 1er degré », la résolution est composée de 3 phases : la première consistant à développer les deux membres de l'équation en utilisant les connaissances stratégiques dites de Développement ; la seconde ayant pour but d'arriver à une expression de la forme : « $ax=b$ » et utilisant les connaissances stratégiques dites de Groupement et de Réduction ; et la troisième étant une phase pour isoler x utilisant les connaissances stratégiques du même nom.

Au 3^e niveau se situent les μ -Tuteurs. La notion de μ -Tuteurs est associée à une connaissance stratégique telle que celles utilisées par un m-Tuteur. Ainsi plusieurs μ -Tuteurs sont nécessaires pour un m-Tuteur, aidant à la compréhension de chacune des connaissances stratégiques impliquées par la résolution d'un exercice. Concernant l'exemple précédent, 4 différents μ -Tuteurs portent ainsi sur les 4 stratégies précitées, un pour chaque stratégie : Développement, Réduction, Placement et Isolation. Chaque μ -Tuteur est associé assez naturellement à un ensemble de règles de réécriture algébrique. Par exemple, pour le μ -Tuteur s'occupant de réduction, il s'agit de toutes les règles de réduction : suppression des éléments neutres, ou réduction par éléments absorbants, calculs arithmétiques, regroupements, etc.

Au 4^e niveau se trouvent les η -Tuteurs. Les η -Tuteurs sont associés aux règles de réécriture algébrique. Les η -Tuteurs sont conçus pour aider la compréhension des règles utilisées dans les μ -Tuteurs. Par exemple, pour le μ -Tuteur portant sur la stratégie dite de Placement, un η -Tuteur est associé à la règle dite de mouvement additif : « $x+a=b \rightarrow x=b-a$ ».

L'utilisation de ces tuteurs relevant de la remédiation, ils ne se déclenchent qu'après le diagnostic d'erreurs relatives à un domaine précis où ils sont applicables. Le diagnostic peut être celui d'une conception erronée ou d'une application stable d'une règle de calcul erronée. Nous avons surtout travaillé sur les niveaux 3 et 4 de l'architecture proposée, en partant d'une hypothèse de diagnostic d'application d'une règle erronée. Pour le niveau 4, dans le domaine qui lui est caractéristique, chaque η -Tuteur possède une liste d'exercices en propre. Une gradation dans la difficulté des exercices permet de faire varier l'exercice que le η -Tuteur doit proposer à l'élève, en fonction de l'histoire de l'élève au cours de la tentative de remédiation.

Au niveau 4, le comportement des η -Tuteurs est basé sur les actions des élèves. Pour analyser leurs réponses, il a été décidé de diagnostiquer cinq cas génériques d'application de règles, relativement à deux règles associées aux η -Tuteurs. La première est une règle correcte attendue, c'est celle qui est l'objet d'un apprentissage. La seconde est une règle erronée observée auparavant chez

l'élève. Le diagnostic automatique a établi la stabilité de cette règle chez l'élève. Les cinq diagnostics génériques envisagés sont :

- c'est la règle appliquée et la règle correcte attendue,
- c'est une règle dite fondamentale liée à la règle correcte attendue (par exemple la règle fondamentale « $x+a=b \rightarrow x+a-a=b-a$ » liée à une règle de mouvement additif « $x+a=b \rightarrow x=b-a$ »),
- c'est la règle erronée repérée chez l'élève, associée à la règle correcte attendue,
- c'est une autre règle correcte,
- c'est une autre règle erronée.

Les tuteurs sont conçus pour être très réactifs. Ils demandent à l'élève d'effectuer une action et fournissent un feed-back pour cette action. L'action est typiquement un pas de calcul dans la résolution d'un exercice. Que l'action de l'élève soit correcte, erronée, à propos ou pas, le tuteur réagit. Lors de l'exécution d'un tuteur de niveau supérieur (c'est-à-dire 1, 2 ou 3), si une erreur concernant un niveau inférieur est répétée plusieurs fois, le déroulement de ce tuteur s'arrête pour laisser place à celui dudit tuteur de niveau inférieur, avant de reprendre. Cependant, pour ne pas noyer l'élève avec de nombreux appels de tuteurs imbriqués, les changements de tuteurs se font de manière transparente.

Au niveau 3, les μ -Tuteurs sont organisés sous une forme bien connue en informatique, choisie pour sa simplicité et son expressivité : ce sont des automates d'état finis dont les états correspondent à des η -Tuteurs et les transitions dépendent des cinq diagnostics génériques possibles produits par les η -Tuteurs.

3.8.4.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre s'est effectuée dans le logiciel APLUSIX, en utilisant le langage de système à base de connaissances SIM.

Le travail de mise en œuvre s'est concentré sur les η -Tuteurs. Pour les tests effectués sur cette mise en œuvre, nous avons supposé qu'un η -Tuteur de remédiation de la règle de mouvement additif avait été activé auparavant par un mécanisme quelconque.

Pour ce η -Tuteurs :

- La règle correcte attendue, dite de mouvement additif, est : $x+a=b \rightarrow x=b-a$
- La règle fondamentale associée est : $x+a=b \rightarrow x+a-a=b-a$
- 5 règles erronées ont été associées, par exemple : $x+a=b \rightarrow x=a+b$.

Ce η -Tuteur contient une liste spécifique d'exercices, de complexité graduée, pour s'assurer que l'élève a bien compris son erreur et assimilé le comportement correct. Cette liste peut contenir des exercices spécifiques ou des patrons d'exercices empruntés à la carte des tests d'APLUSIX. Dans notre exemple : ($\langle\langle x+1=2 \rangle\rangle \langle\langle x-4=9 \rangle\rangle \langle\langle x+49=286 \rangle\rangle \langle\langle x+1/3=4/3 \rangle\rangle$ PatronEqDeg1Isolation1 PatronEqDeg1Isolation2)

Cinq compteurs génériques sont définis dans ce η -Tuteur, comme dans tout η -Tuteur. Ils servent à conserver le nombre d'applications des règles correctes et erronées effectuées par l'élève. Il y a un compteur pour chaque diagnostic générique. Dans cette mise en œuvre, ces compteurs constituent l'histoire condensée des comportements de l'élève au cours de l'utilisation de ce η -Tuteur.

Enfin, des messages génériques de transitions à la fin d'un exercice et entre exercices, pour informer l'élève de l'avancée de son travail, sont associés à ce η -Tuteur.

Après une phase d'initialisation, qui consiste à proposer un exercice à l'élève en lui indiquant la consigne « Faire un pas de calcul et cliquer sur le bouton Réponse », le η -Tuteur laisse la main à

l'élève et attend la fin du travail de l'élève. Quand le η -Tuteur reprend la main, il diagnostique localement la règle utilisée et réagit en fonction de ce diagnostic et de l'histoire des précédents diagnostics.

Les figures 49 et 50 donnent un extrait de la programmation de la réaction du η -Tuteur pour deux types de réactions.

La figure 49 concerne la réaction du η -Tuteur dans le cas où, d'une part, la réponse de l'élève est correcte et, d'autre part, c'est la réponse attendue. Dans ce cas, le message de rétroaction est « C'est correct, passons à l'exercice suivant ». Le η -Tuteur passe alors effectivement à l'exercice suivant.

La figure 50 concerne la réaction du η -Tuteur dans le cas où, d'une part, la réponse de l'élève est erronée et, d'autre part, c'est une réponse qui n'est pas prévue par le η -Tuteur (cela peut être une réponse aberrante ou une réponse hors sujet). Dans ce cas, le message de rétroaction est « Tu n'as pas correctement appliqué la règle ». Le η -Tuteur attend alors une nouvelle réponse de l'élève.

```
{[nom SuiteTuteur-RI-utilisée-OK]
 [sorteDe SuiteTuteur]
 [si (
 (soit ?deuz (ExpressionDeLaDeuxiemeEtape)) // expression que fournit l'élève
 (soit ?ri (UneApplicabiliteRegle ?regle_imp ?enonce))
 // une règle applicable de la règle importante sur l'énoncé
 (soit ?riappl (appliquerRegle ?ri)) // applique la règle applicable
 (=AC ?deuz ?riappl) )] // vérifie l'égalité avec la réponse de l'élève
 [alors (
 (information "C'est correcte, passons à l'exercice suivant")
 (LancerTuteur) )]} // pour passer à un nouveau exercice
```

Figure 49. Réaction du η -Tuteur dans le cas correct.

```
{[nom SuiteTuteur-RER-utilisée*1]
 [sorteDe SuiteTuteur]
 [si (
 (soit ?deuz (ExpressionDeLaDeuxiemeEtape))
 (non (Equivalents ?deuz ?enonce)) // l'expression fournie par l'élève est erronée
 (VariablesExoCourant NombreRERusité 0)
 // Aucun règle erronée associée à la règle traitée n'a encore été diagnostiquée
 (VariablesExoCourant BoolRERAppliq 1) )] // l'élève vient d'appliquer une règle
 erronée
 [alors (
 (information "Tu n'as pas correctement appliqué la règle")
 (VariablesExoCourant NombreRERusité 1)
 (VariablesExoCourant BoolRERAppliq 0) )]} // mise à jour des var. locales
```

Figure 50. Réaction du η -Tuteur à la première erreur.

La mise en œuvre est générique, elle définit un η -Tuteur comme un ensemble de données statiques mis en action par un moteur générique de η -Tuteurs programmé en SIM. Le schéma d'exécution d'un η -Tuteur quelconque est donc le suivant : initialisation, boucle de réactions, finalisation.

Lorsque l'exécution du η -Tuteur a été initiée par un μ -Tuteur, les informations obtenues par le η -Tuteur lors de son utilisation servent au μ -Tuteur, lorsqu'il reprend la main à la fin de l'exécution du η -Tuteur, pour choisir la transition qu'il va effectuer vers un autre η -Tuteur.

Liste des messages génériques implantés ou prévus

Messages de communication

SUITE		« Clique sur le bouton SUITE pour continuer »	
CLAVIER		« tu peux aussi utiliser le clavier virtuel »	

Messages Rétroactifs

Type	Caractéristiques diagnostique et message	Message	Commentaire
MRJA	Message Rétroactif Juste Attendue	« C'est juste »	Equivalence
MRJFIA	Message Rétroactif Juste Forme Incorrecte Attendue	« C'est bien mais ce n'est pas la forme attendue, il faut finir ton raisonnement ou tes calculs »	Equivalence
MRJFINA	Message Rétroactif Juste Forme Incorrecte Non Attendue	« L'équation est équivalente mais tu ne réponds pas à la question. Ce n'est pas une bonne forme »	Equivalence
MRIFAEA	Message Rétroactif Incorrect Forme Attendue Erreur Attendue	« C'est faux, tu ne sembles pas appliquer une règle correcte »	Non-Equivalence
MRIFA	Message Rétroactif Incorrect Forme Attendue	« C'est faux, la forme est celle attendue, mais tu dois peut-être appliquer une règle fausse »	Non-Equivalence
MRIFNA	Message Rétroactif Incorrect Forme Non Attendue	« C'est faux. Tu ne réponds pas à la question. Ce n'est pas une bonne forme »	Non-Equivalence
MRJRNA	Message Rétroactif Juste Règle Non Attendue	« La règle est correcte, mais ce n'est pas celle attendue »	Equivalence
MRIRF	Message Rétroactif Incorrect Règle Fausse	« La règle est fausse »	Non-Equivalence
MRIRIA	Message Rétroactif Incorrect Règle Incorrecte Attendue	« C'est faux, tu n'appliques pas la règle correctement »	Non-Equivalence

Messages de Transition

Noms	Caractéristiques	Message	Commentaire
MTDE	Message de Transition vers un Deuxième Exemple	« On va faire un deuxième exemple »	En général ce message sert à faire un travail sur un même type de tâche et renvoie au même nano tuteur après avoir travaillé une seule fois sur ce nano tuteur
MTTE	Message de Transition vers un Troisième Exemple	« On va faire un troisième exemple »	En général ce message sert à faire un travail sur un même type de tâche et renvoie au même nano tuteur après avoir travaillé deux fois sur ce nano tuteur
MTTR	Message de Transition vers un Travail sur une Règle	« On va travailler sur la règle »	Sert à transiter vers un nano tuteur de travail d'une règle

MTCF	Message de Transition vers Calcul à Finir	« Il faut finir ton raisonnement ou tes calculs »	Invite à finir le calcul ou le raisonnement
MTCTF	Message de Transition vers Calcul Toujours à Finir	« Les calculs ne sont toujours pas terminés, il faut effectuer les calculs »	Nouvelle invite à continuer le travail
MTNC	Message de Transition vers un Nano-tuteur de réduction des Calculs	« On va apprendre à réduire »	Transition vers un nano-tuteur de réduction
MTBF		« Il faut encore essayer de trouver une équation sous la forme $ax = b$ »	On invite encore à continuer le travail en essayant de mettre sous la bonne forme
MTEBF	Message de Transition vers Encore Bonne Forme	« Il faut encore essayer de trouver une équation sous la forme	On invite encore à continuer le travail en essayant de mettre sous la bonne forme
MTAR	Message de Transition vers Modifier Règle	« Si tu appliques une règle, ce n'est pas la bonne. Essaie d'appliquer une autre règle sur le prochain exemple »	On continue à travailler sur un deuxième exemple
MTEAR	Message de Transition vers Encore Autre Règle	« Si tu appliques une règle, ce n'est pas la bonne. Essaie d'appliquer encore une autre règle sur le prochain exemple »	On continue à travailler sur un troisième exemple
MTEAR	Message de Transition vers Envisager Autre Règle	« Essaie d'envisager une autre règle sur le prochain exemple »	On continue à travailler sur autre exemple
MTEEAR	Message de Transition vers Encore Envisager Autre Règle	« Essaie encore d'envisager une autre règle sur le prochain exemple »	On continue à travailler sur autre exemple

3.8.4.3 Copies d'écran du η -Tuteur

Les figures ci-dessous montrent une tâche présentée à l'élève et la rétroaction du η -Tuteur après une réalisation erronée de la tâche par l'élève.



Figure 51. Initialisation du η -Tuteur.

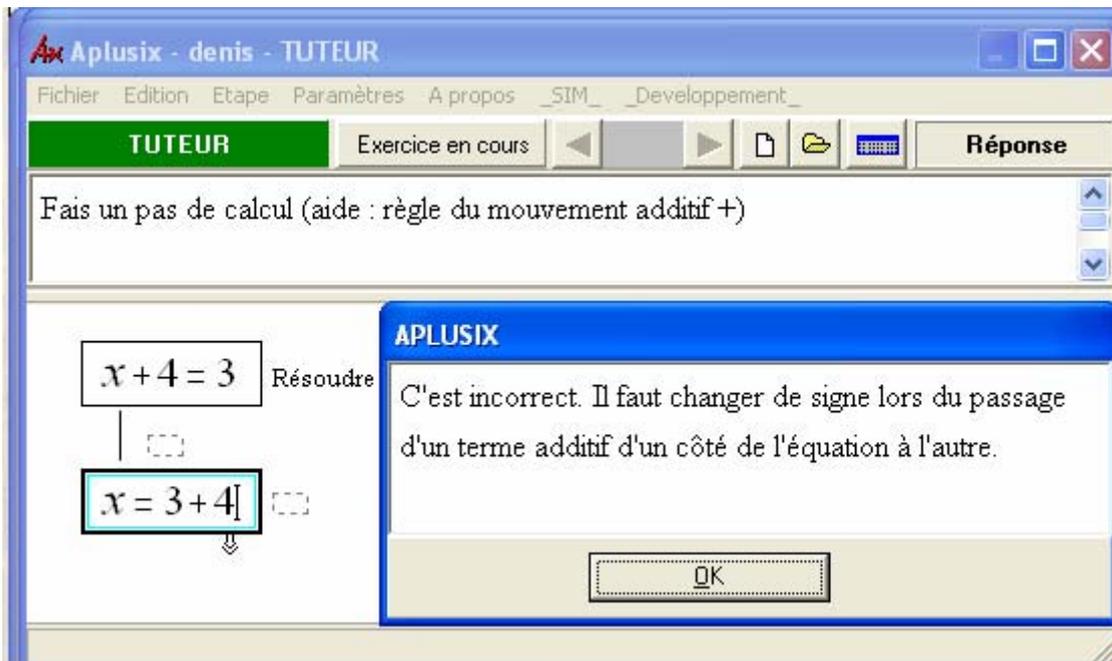


Figure 52. Réaction du η -Tuteur.

3.9 Conclusion et perspectives

Conclusion

Au terme de la phase contractuelle de ce projet de « Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique », les acteurs du projet ont produit des résultats, sur l'ensemble des objectifs initiaux, que nous allons résumer maintenant.

Un recueil d'une quantité importante de protocoles a été réalisé, piloté par les didacticiens et les psychologues du projet. Les passations ont été variées : certaines se sont produites dans des conditions quasi écologiques (réalisées par le professeur dans le fonctionnement normal de sa classe) et parfois massive (2500 élèves dans l'expérimentation Brésilienne); d'autres dans des conditions plus contrôlées, de petits groupes travaillant en dehors du temps scolaire. Les domaines de l'algèbre concernés ont été variés ; des tests ont couvert tout le programme d'algèbre du cursus, d'autres ont ciblé un domaine spécifique.

Un premier travail d'analyse automatique des protocoles, à l'aide de techniques de classification, a produit des groupes d'élèves intéressants du fait qu'on peut qualifier leurs comportements d'une façon compréhensible (synthétique, décomposeur, etc.). Ce travail a montré, en même temps, que les aspects algébriques ne peuvent pas être atteints par apprentissage automatique, sans se placer dans un modèle général plus organisé et plus riche que celui apporté par les seules listes d'actions des élèves.

Le travail d'analyse manuelle, réalisé par les didacticiens et les psychologues du projet, des protocoles a permis de produire des listes de règles erronées expliquant les comportements des élèves. Sur certaines classes, la fréquence et la prédictibilité des règles a été étudiée manuellement. La recherche d'un modèle général de règles et d'une mise en œuvre informatique des règles produites par l'analyste, d'une façon adaptée à la construction ultérieure de conceptions, nous a conduit à reconcevoir les règles. Nous l'avons fait sur les règles de mouvement dans les équations et inéquations, passant d'un ensemble désordonné de règles produites par les analystes (avec un certain nombre de différences entre les analystes) à une structure capturant les bons fonctionnements et un nombre important de dysfonctionnements. C'est un travail original. Sleeman (1982, 1984) par exemple, qui a beaucoup travaillé sur l'algèbre sur le plan diagnostique dans les années 80, ne s'est pas questionné sur les meilleures formes de règles, utilisant des règles très syntaxiques.

Le diagnostic local automatique, qui explique les transformations d'élèves par des successions de règles, a été mené à bien. Il produit des résultats satisfaisants sur les deux sous-domaines spécifiquement étudiés dans le projet, les actions sur les équations et inéquations, d'une part, les développements et les réductions, d'autre part, tant au niveau de son taux de succès que de celui de la qualité des diagnostics.

Le travail sur les conceptions et les théorèmes-en-acte, a été conduit de deux façons complémentaires.

La première façon comporte une construction manuelle des conceptions, une représentation informatique de ces conceptions et une assignation automatique des théorèmes-en-acte aux élèves. Ce travail apporte deux résultats. Le premier résultat est une carte des théorèmes-en-acte qui est un objet étudiable par le chercheur, indépendamment du fait qu'elle a été produite dans un contexte technologique. Cette carte comporte les éléments principaux des conceptions sur les mouvements et leurs spécialisations à des contextes. Les 14 éléments principaux se décrivent en langue naturelle, d'une façon compréhensible par l'enseignant. Ce sont donc des constructions qui peuvent s'introduire dans l'école. Le deuxième résultat est l'assignation automatique des conceptions, réalisée sur un nombre important d'élèves, et l'étude didactique qu'elle permet de faire. On a ainsi un nouveau

mécanisme, applicable de façon massive, puisqu'une fois les conceptions et les théorèmes-en-acte représentés dans le système, le calcul se fait entièrement automatiquement.

La deuxième façon construit automatiquement les théorèmes-en-acte, à partir des données produites par le diagnostic local, à l'aide de techniques symboliques d'apprentissage automatique. C'est un travail original qui peut aussi être appliqué de façon massive, sans nécessiter une construction manuelle de théorèmes-en-acte.

Les deux façons sont complémentaires, la seconde pouvant exhiber en particulier des théorèmes-en-acte à ajouter à la carte construite par le chercheur.

Qu'ils soient produits par l'une ou l'autre des deux façons, les théorèmes-en-acte calculés sur des élèves ont deux grands intérêts : le premier est de rendre compte d'une partie importante de l'état de connaissance des élèves, dans des termes compréhensibles, et de nous faire ainsi progresser dans la compréhension des connaissances des élèves ; le deuxième est d'être une base pour mettre en place des stratégies d'enseignement, naturelles ou artificielles.

Nous avons ainsi, sur une partie du domaine, une chaîne de processus totalement automatiques permettant de traiter les protocoles des élèves, pour produire des ensembles de règles et des théorèmes-en-acte pour des élèves ou pour des classes.

Le travail sur les stratégies d'enseignement a permis de produire des spécifications générales orientées vers une mise en œuvre informatique. C'est un regard différent sur l'ingénierie didactique qu'il faut adopter pour aller dans ce sens. Il a aussi comporté la réalisation d'une maquette de tuteur artificiel montrant la faisabilité de ce type d'artefact dans le cadre choisi.

La collaboration interdisciplinaire a été essentielle pour toutes les phases de nos travaux. Au niveau du recueil des protocoles, si les didacticiens et psychologues ont été les moteurs des passations des expérimentations, les informaticiens ont eu à organiser le stockage des informations dans une base de donnée interrogeable de façons variées. La production de groupes d'élèves par classification a été réalisée par des informaticiens, mais des didacticiens ont aidé à interpréter les groupes. La mise en œuvre informatique des règles des analystes a été réalisée principalement par les informaticiens, mais a nécessité des interactions très régulières pour décider des règles à prendre et des règles à laisser de côté, ainsi que du niveau de généralité des règles implantées. C'est aussi la collaboration interdisciplinaire qui a permis la reconception des règles et a produit le concept de règle avec traits. La réalisation du diagnostic local automatique a été faite par les informaticiens, mais sa mise au point (de nombreux paramètres doivent être choisis) a été effectuée en interaction avec les didacticiens et les psychologues qui étudiaient les résultats des diagnostics automatiques. Le travail sur les conceptions et les théorèmes-en-acte a aussi été réalisé en étroite collaboration. Après la reconception des règles, les didacticiens ont été à l'origine des idées générales de hiérarchies de théorèmes-en-acte selon des contextes, idées qui ont pu être mises en œuvre par un travail commun. La construction automatiquement des théorèmes-en-acte par apprentissage automatique a été réalisée par des informaticiens ; les productions ont été analysées avec les didacticiens. Enfin les spécifications générales des stratégies d'enseignement ont été produites par les didacticiens qui ont interagit avec les informaticiens pour produire des spécifications plus adaptées à une mise en œuvre informatique, le tuteur artificiel étant construit par des informaticiens en interaction avec des didacticiens pour spécifier dans le détail les interactions élève-système.

Notre projet global est un projet original et ambitieux. Avec le volume de travail réalisé et les résultats produits, sur l'ensemble des objectifs initiaux, et grâce à une collaboration interdisciplinaire, le but général du projet est atteint, pour ce qui concerne sa phase contractuelle sur deux ans. Le projet se poursuit, après cette phase, comme nous l'indiquons ci-dessous.

Perspectives

Dans cette dernière partie, nous allons présenter les perspectives du projet. Comme nous l'avons dit, tous les acteurs poursuivent le projet, mais plusieurs pistes sont possibles. Si certaines s'imposent assez naturellement, d'autres donneront lieu à des choix qui seront effectués au moment opportun.

Nous regarderons les différents points entrant dans les perspectives sous plusieurs angles :

- un angle de recherche fondamentale comportant des objectifs tels que :
 - * compréhension des états de connaissance des élèves en algèbre,
 - * construction de mécanismes complexes et originaux,
- un angle de construction d'objets intéressant divers publics, en particulier :
 - * le didacticien,
 - * l'enseignant,
 - * l'élève.
- un angle de construction d'outils.

Nous regarderons, pour certains points, le lien que les résultats peuvent entretenir avec le projet APLUSIX. Pour que cela soit plus compréhensible, voici un résumé des perspectives de ce projet. APLUSIX entre dans une phase de développements complémentaires et de commercialisation. Cette phase se fera dans un cadre d'entreprise : filiale de l'université ou startup. En effet, la plupart des développements complémentaires comportent peu de recherche et beaucoup d'ingénierie. Il est donc judicieux qu'ils ne soient réalisés que si le produit a du succès et si son succès permet de les financer. Il n'y a, en fait, pas d'alternative. Un succès commercial d'APLUSIX est tout à fait possible : le logiciel a montré son intérêt pour aider les élèves à apprendre le calcul algébrique (cf. opinions et résultats sur <http://aplusix.imag.fr>) ; il intéresse des éditeurs de logiciels pour l'enseignement de plusieurs pays.

Le recueil de nouveaux protocoles est nécessaire pour tous nos travaux. Il sera, bien sûr, poursuivi. Le logiciel APLUSIX est opérationnel dans plusieurs langues ; il a montré, dans ce projet, son intérêt pour recueillir des protocoles, permettant aux élèves de travailler d'une façon libre, proche du papier crayon. Certes, des biais peuvent être introduits par son utilisation, en particulier le fait de dupliquer une expression, puis de la modifier, peut conduire à des modifications inachevées, mais notre expérience actuelle nous laisse penser que ces biais sont mineurs. En outre, nous ne voyons pas d'autre moyen de recueillir, de façon massive, des protocoles.

Le travail de classification automatique, à partir des actions des élèves, sans introduction de mécanismes algébriques, se situe dans la catégorie de la construction d'objets intéressant le didacticien. Il n'est pas certain qu'il soit poursuivi. Cela dépendra des espoirs que l'on aura d'obtenir de nouvelles informations significatives.

Le travail d'analyse manuelle des protocoles, pour produire des règles erronées, et le travail de structuration des règles produites se situent dans deux catégories : compréhension des états de connaissance des élèves et construction d'objets intéressant le didacticien. Il sera poursuivi, afin de couvrir l'ensemble du domaine de l'algèbre pour les classes de la 4^e à la 1^{re}. Ce travail est le socle du projet, il est en amont du diagnostic local automatique ainsi que de la construction et de l'assignation des conceptions. Nous chercherons, comme pour les règles de mouvement, à trouver une forme de règle avec de traits pertinents pour la construction de conceptions.

Un travail d'analyse des protocoles pour produire des règles par apprentissage automatique pourrait être envisagé. Il entrerait dans la catégorie de la construction de mécanismes complexes et originaux. Sleeman (1987) a déjà effectué des recherches dans ce sens ; il a construit une maquette et obtenu un *théorème d'existence*. Si le problème n'est pas très complexe lorsque l'on se place dans un contexte simplifié, il devient très difficile lorsque l'on se place dans le contexte réel, comme celui que nous utilisons, en particulier du fait que l'élève est libre de combiner l'application de plusieurs règles, ce qui est même souhaitable. Produire des règles aussi utilisables pour les constructions aval que celles

qui ont été produites à ce jour à la main, avec des tâtonnements et des reconceptions, semble être inaccessible.

Le travail sur le diagnostic local automatique sera poursuivi. S'il produit actuellement des résultats satisfaisants, il reste améliorable. Ce travail se situe dans une catégorie de développement d'outils pour permettre la production des autres résultats.

Les travaux de construction manuelle et automatique de conceptions entrent dans la catégorie de la construction d'objets intéressant le didacticien, à travers la publication de la carte des conceptions produites. Ces travaux seront poursuivis, la construction d'une grande carte des conceptions étant un objectif fort du projet. Ces travaux peuvent entrer dans la catégorie de la construction d'objets intéressant l'enseignant, si les conceptions et leurs mécanismes d'assignation de conceptions sont intégrés au logiciel APLUSIX. En effet, cela permettrait à APLUSIX d'indiquer à l'enseignant, dans des termes compréhensibles, les conceptions qui ont été attribuées aux élèves et de lui fournir des statistiques sur ces conceptions au niveau des classes. On apporterait ainsi aux enseignants des informations originales et très utiles, à partir de situations ne lui demandant pas un travail important puisqu'elles consistent à faire utiliser le logiciel APLUSIX sur des bases d'exercices fournies.

Le travail sur les stratégies d'enseignement entre dans la catégorie de la construction d'objets intéressant l'enseignant. Il sera poursuivi pour spécifier plus précisément, et en plus grand nombre, des stratégies d'enseignement par rapport à des conceptions repérées, les activités pouvant être réalisées avec ou sans un EIAH.

Le travail sur la construction de tuteurs artificiels peut entrer dans la catégorie de la construction de mécanismes complexes et originaux ou dans la catégorie de la construction d'objets intéressant l'enseignant et l'élève. Actuellement, la maquette fonctionne sur le principe d'un nano-tuteur associé à une règle correcte et quelques règles erronées. Lui faire couvrir le domaine envisagé demande la construction d'un nombre très important de nano-tuteurs, sauf si l'on trouve un mécanisme beaucoup plus générique que le mécanisme actuel. La recherche d'un tel mécanisme entre dans la catégorie de construction de mécanismes complexes et originaux. Sinon, l'intérêt du travail est de développer tous ces nano-tuteurs pour les inclure dans APLUSIX et les faire utiliser réellement par des élèves. C'est alors, au niveau informatique, plus un problème de développement d'un produit commercial que de travail de recherche ; cela reste un travail de recherche au niveau didactique.

3.10 Références

- Anderson J. R. (1983). *The Architecture of Cognition*. Harward University Press.
- Artigue, M. (1991) Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2/3) 241-285.
- Arzarello F. (1993) : Analysing algebraic thinking. ESR Seminar Group Working. Conference in Algebraic processes and the role of symbolism. Institute of Education. University of London, September 1993.
- Arzarello F., L.Bazzini, G. Chiappini, (2001). *A model for analysing algebraic process of thinking*, in Perspectives on School Algebra, Mathematics Education Library, V.22.
- Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.
- Baffès P., Mooney R. (1996). *Refinement-Based Student Modeling and Automated Bug Library Construction*. Journal of AI in Education, Vol 7-1, pp 75-116.
- Balacheff N. (1994). *Didactique et Intelligence Artificielle*. 'Didactique et Intelligence Artificielle', Balacheff N. et Vivet M., Eds La pensée sauvage.
- Balacheff, N. (2001). *Les connaissances, pluralités de conceptions : le cas des mathématiques*. Les Cahiers Leibniz n°19, Février 2001.
- Bell, A., Swann, M., Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399-420.
- Blatt M., Wiseman S. and Domany E. (1997). *Neural Computation* 9 p. 1805.
- Booth L.R. (1984). *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*. Petit x n° 5, IREM de Grenoble.

- Bouhineau D., Bronner A., Chaachoua H., Huguet T. (2003) Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre. Actes de la conférence EIAH 2003, Strasbourg, 15-17 avril, p. 79-90.
- Bronner A., Noirfalise A. (2001). *Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques à propos de l'algèbre en quatrième*, Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, La pensée sauvage, Grenoble.
- Bronner A., Huguet T., Bouhineau D., Nicaud J.F. (2003) Usages didactiques du logiciel Aplusix pour l'enseignement de l'algèbre. Actes du colloque ITEM 2003, Reims.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Revue de Didactique des Mathématiques Vol. 7/2*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Brousseau G. (1978). Étude locale des processus d'acquisitions scolaires, Enseignement élémentaire des mathématiques n°18, éd. IREM de Bordeaux.
- Brousseau G. (2001) Les erreurs des élèves en mathématiques. Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique. /Petit x,/ n°57, 5-30.
- Brown J.S, Burton R.R. (1978). *Diagnostic Models for procedural bugs in basic mathematical skills*. Cognitive Science Vol 2, pp. 155-191.
- Buchanan B.G. and Shortliffe E.H. (1984). Rule-Based Expert Systems, The Mycin experiments of the Stanford Heuristic Programming Project. Addison-Wesley Publishing.
- Caramazza, A., McCloskey, M., Green, B. (1981). Naive beliefs in sophisticated 'subjects': Misconceptions about trajectories of objects. *Cognition*, 9, 117-123.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, première partie, *Petit x*, n° 5, pp. 51-94. Irem de Grenoble.
- Chevallard Y., (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*. Petit x n°19, Irem de Grenoble.
- Chevallard Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2), La pensée sauvage, Grenoble.
- Collins, A.M., Stevens, A.L. (1984). Mental models of complex systems (Report N°. 5788). Cambridge, MA: Bolt, Beranek & Newman, Inc.
- Coulange L, (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologioque, cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équation en classe de Troisième*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.
- Davis R.B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1n°3.
- Demby A., (1997). Algebraic Procedures used by 13-to-15 Years Olds, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 33, 45-70.
- Dershowitz N., Jouannaud J.P. (1989). Rewrite Systems. In *Handbook of Theoretical Computer Science*. Vol B, North-Holland.
- Dillenbourg et Self (1992). *A framework for learner modelling*. Interactive Learning Environments Vol 2, pp 111-137.
- Douady R. (1984). *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'état, Université Paris VII.
- Drouhard J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.
- Fischbein, E., (1989). Tacit models and mathematical reasoning, *For the Learning of Mathematics*, 9, 9-14
- Fischbein, E., (1994). Tacit models. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (pp. 97-109). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17
- Gélis, J.M. (1994). *Eléments d'une théorie cognitive et computationnelle de l'algèbre. Application au cas de la factorisation d'expressions polynomiales*. Thèse de l'université de Paris XI.
- Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic*. Van Nostrand: New York.
- Grugeon B., (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse, Université Paris VII.
- Hatano, G, Inagaki, K. (1994). Young children's naive theory of biology. *Cognition*, 50, 171-188.

- Kempton, W. (1987). Two theories of home heat control. In D. Holland & N. Quinn (Eds.), *Cultural models in language and thought* (pp. 222-242). Cambridge: Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran (1989). Aperspective on algebraic thinking. In : *Proceeding of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME XIII). Paris, 2, 163-171.
- Kieran C. (1990). *Mathematics and cognition*, Cambridge University Press.
- Kieran C. (1991). A Procedural-Structural Prespective on Algebra Research. *Proceedings of Psychology of Mathematics Education*, Furinghetti F (eds), Assise, Italy.
- Kieran C., (1994). A functional approach to the introduction of algebra. Some pros and Cons. *Proceedings of PME 18*, Vol I, 157-175, Université de Lisbonne.
- Langley P., Ohlsson S. (1984). *Automated Cognitive Modeling*. Proceedings of the 2nd National Conference on Artificial Intelligence.
- MEN (1999). Ministère De La Jeunesse, De L'Education Nationale Et De La Recherche, Mathématiques, *Programmes et Accompagnement*, CNDP, Paris, (réimpression 2004)
- McCloskey M., Kargon R. (1988). The meaning and use of historical models in the study of intuitive physics. In S. Strauss (Ed.), *Ontogeny, philogeny, and historical development* (pp. 49-67). Norwood, NJ: Ablex.
- Mitchell T. (1997). *Machine Learning*, McGraw Hill, 1997.
- Nicaud J.F. (1987)]. *Aplusix : un système expert de résolution pédagogique d'exercices d'algèbre*. Thèse de l'Université de Paris XI.
- Nicaud J.F., Bouhineau D., Gélis J.M. (2001). Syntax and semantics in algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The University of Melbourne.
- Pearl J. (1984). *Heuristics*. Addison-Wesley, London.
- Pellegrino F. (2005). Conception d'une base de données et d'une plateforme Web générique. Mémoire de stage d'ingénieur. CNAM. Grenoble.
- Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant*. Paris: Alcan.
- Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies*, Armand Colin,
- Renaudie D. (2005). Méthodes d'apprentissage automatique pour la modélisation de l'élève en algèbre. Thèse de l'université Joseph Fourier. Grenoble.
- Samarapungavan, A., Wiers, R. W. (1997). Children's thoughts on the origin of species : A study of explanatory coherence. *Cognitive Science*, 21, 147-177.
- Sfard A., (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects a different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, 1-36.
- Sfard A. et Linchevski L. (1994), *The gains and the pitfalls of réification – The cas of algebra*, Educational Studies in Mathematics, Vo.l 26, Kluwer Academic Publishers.
- Sison R., Shimura M. (1998). *Student Modeling and Machine Learning*. International Journal of AI in Education Vol 9, pp128-158.
- Sison R., Numao M., Shimura M. (2000). *Multistrategy Discovery and detection of Novice Programmer Errors*. Machine Learning Vol 38, Kluwer Academic Publishers, pp 157-180.
- Sleeman D. (1982). *Assessing aspects of competence in basic algebra*. Sleeman D. & Brown J. Eds, Intelligent Tutoring Systems, London Academic.
- Sleeman D. (1984). *Basic algebra revisited: a study with 14 year olds*. International Journal of Man-Machine Studies, vol 22 No 2.
- Sleeman D. (1987). *PIXIE : A shell for developing intelligent tutoring systems*. Lawler R. & Yazdani M. Eds, Artificial Intelligence in Education, New Jersey.
- Soury-Lavergne S., Balacheff N. (2003). *Baghera Assessment project : Designing an Hybrid and Emergent Educational Society*. Cahier Leibniz n°81, Avril 2003.
- Tchounikine P. (2002). *Information-Interaction-Intelligence*, Vol 2.1, Cepaduès-Edition
- Tirosh, D. Graeber, A.O. (1991). The influence of problem type and primitive models on preservice elementary teachers' about division. *School Science and Mathematics*, 91, 157-163.
- Trouche L. (1996). *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation, chap. II.b.1.iii : une typologie des comportements*. Thèse soutenue en 1996 au laboratoire ERES, Université Montpellier II, pp 210-222.

- Vergnaud (1991) La théorie des champs conceptuels. Revue de Didactique des Mathématiques Vol10/1.2 pp133-170 Ed La pensée sauvage
- Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001 Jean Portugais (Ed). La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.
- Vosniadou, S., Brewer, W.F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24, 535-585.
- Wenger E. (1987). *Artificial Intelligence and Tutoring Systems*. Los Altos : Morgan Kaufmann Publisher.

4 ANNEXES

4.1 ANNEXE 1 : règles de l'analyste provenant de l'étude de trois classes de troisième d'EXP-Paris

Règles sur les puissances

P1 $ax(bx)=abx$; a, b entiers + ou - : 64 utilisations pour 30 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%
11	24,66%	28,77%	85,71%	50,00%
13	27,40%	54,79%	50,00%	30,00%
22	17,81%	35,62%	50,00%	69,23%
28	16,44%	43,84%	37,50%	75,00%

Exemples

Thom 4 : $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+6x-24x+24x+96=13x+96$

Auff 11 : $7x(3x+5)=21x+7x*5$

Dani 13 : $(9x-5)(-6x+2)=-54x+18x+30x-10=-6x-10$ p

Dani 22 : $4x(-1-7x)=-4x-28x=-32x$ p

Dauv 28 : $(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x-15x=-3x-3$ p

P2 $ax^2+bx=(a+b)x$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
1	1,37%	20,55%	6,67%	100,00%
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%

Anne 1 : $5x^2+3x-7-3x^2+2x+8=7x+1$

P3 $ax^2=a^2x$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%
14	1,37%	13,70%	10,00%	100,00%

P4 $x+x=x^2$; 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
29	2,74%	54,79%	5,00%	0,00%

Lebe 15 : $8x-4=3x-2$ $8x-3x=4-2$ $8x^2=2/3$

P5 $ax^2+bx^2=(a+b)x^4$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
16	1,37%	27,40%	5,00%	100,00%

Anne 16 : $10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=16x-9x^2$ 4

P6 $ax^2+ax=ax^3$; a entier + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%

Depa 16 : $10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=10x-6x-3-3x^2$

P7 $ax+bx^3=(a+b)x$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%

Depa 16 : $10x-3x^3=7x$

P8 $ax^3+bx^2=(a+b)x^3$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%

Depa 16 : $10x-6x^3-3x^2=10x-3x^3$

P9 $ax^2+bx=(a+b)x^2$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
14	1,37%	13,70%	10,00%	0,00%

P10 $ax^2+b=(a+b)x^2$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
25	1,37%	36,99%	3,70%	0,00%

Règles de priorité des opérations

O1 $-(ax+b)=-ax+b$; a, b entiers + ou - : 36 utilisations pour 22 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	9,59%	42,47%	22,58%	42,86%
7	6,85%	42,47%	16,13%	60,00%
17	1,37%	38,36%	3,57%	0,00%
19	16,44%	52,05%	31,58%	50,00%
25	15,07%	36,99%	40,74%	54,55%

Exemples

Jose 4 : $7x+(2x-8)-(-3x+12)=9x-x+10x+19x$

Epez 7 : $2-3(-5x-5)+5(4x+8)=2+15x-15+20x+40$ p

Gode 17 : $-9*(-2)-7*(-6+2)=18-42+14$

Chen 19 : $9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x+4+5x-5x+10=9x+14$ p

Depa 25 : $10(-4x-1)-2(4x^2-6)=-40-10-8x^2-12$

O2 $a-bc=(a-b)c$; a, b entiers +, c entier + ou facteur de x ou facteur entre parenthèses : 28 utilisations pour 19 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	17,81%	42,47%	41,94%	46,15%
13	2,74%	54,79%	5,00%	0,00%
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%
17	8,22%	38,36%	21,43%	66,67%
30	8,22%	46,58%	17,65%	100,00%

Exemple

Lesr 7 : $2-3(-5x-5)+5(4x+8)=-1(-5x-5)+5(4x+8)=5x+5+20x+40=25x+45$ p

Auff 17 : $-9*(-2)-7*(-6+2)=18-7(-4)=11*(-4)=-44$ p

Tora 30 : $7-5*5-2=2*3=6$ p

O3 $a-b-c=a-(b-c)$; a, b, c entiers + : 14 utilisations pour 14 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%
30	17,81%	46,58%	38,24%	69,23%

Exemple

Fran 30 : $7-5*5-2=7-25-2=7-23=-16$ p

O4 $a+(b+c)-(d+e)=a+(b+c-d+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - ou facteurs de x + ou -.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	10,96%	42,47%	25,81%	50,00%

Exemple

Dodi 4 : $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+2x-8+3x+12=12x+14$ p

O5 $a+bc=(a+b)c$; a, b entiers +, c facteur de x : 4 utilisations pour 3 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
11	4,11%	28,77%	14,29%	0,00%
28	1,37%	43,84%	3,13%	0,00%

Exemple : Silv 11 : $7x(3x+5)=21x+7x*5=28x*5$

O6 $a-bc=a*(-bc)$; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
17	2,74%	38,36%	7,14%	50,00%

O7 $a-b+c=a-(b+c)$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
2	1,37%	23,29%	5,88%	0,00%

O8 $abc+de=ab+cde$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
5	1,37%	6,85%	20,00%	100,00%

O9 $ax(-bx)=ax-bx$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

O10 $(ax-b)-(-cx+d)=(ax-b)-(-cx+d)$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

O11 $(ax+b)(cx+d)=ax+bcx+d$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

Règles de factorisation

F1 $ax+b=(a+b)x$; a, b entiers + ou - : 9 utilisations pour 3 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	2,74%	42,47%	6,45%	0,00%
7	2,74%	42,47%	6,45%	0,00%
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%
16	1,37%	27,40%	5,00%	0,00%
19	2,74%	52,05%	5,26%	0,00%
28	1,37%	43,84%	3,13%	100,00%

Exemples

Heui exercice 4 : $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+2x+3x-8+12=12x+20=32x$

F2 $ba+bc=b(ac)$; a, b, c entiers + ou - : 6 utilisations pour 5 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
9	5,48%	9,59%	57,14%	100,00%
12	2,74%	10,96%	25,00%	100,00%

Jous 9 : $8a+8b=8(ab)$

F3 $ax^2+bx=x(-b+ax^2)$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
14	2,74%	13,70%	20,00%	50,00%

F4 $ax+ay=x(a+ay)$; a, y entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
12	1,37%	10,96%	12,50%	100,00%

F5 $ax^2-bx=x(a-b)$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
14	1,37%	13,70%	10,00%	100,00%

F6 $ba+bc=2b(ac)$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
9	1,37%	9,59%	14,29%	100,00%

F7 $ab+ac \Rightarrow a=ac-b$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
12	1,37%	10,96%	12,50%	100,00%

F8 $ab+ac=a(b+(ac-a))$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
12	1,37%	10,96%	12,50%	100,00%

F9 $ax+b=a+b$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

F10 $abx=ax(bx)$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève. (règle d2 inversée)

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
14	1,37%	13,70%	10,00%	100,00%

Règles de distribution

D1 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$; a, b, c, d entiers + ou - : 53 utilisations pour 41 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
2	39,73%	23,29%		79,31%
17	32,88%	38,36%		70,83%

Exemples

Baud 2 : $(-3-6)*(6-8)=-18+24-36+48=18$ p

Baud 17 : $-9*(-2)-7*(-6+2)=-9*(-2)-7*(-6)-7*2=18+42-14=46$ p

D2 $(a+bx)(cx+d)=acx+ad+bcx^2+bd$; a, b, c, d entiers + ou - : 6 utilisations pour 6 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	2,74%	54,79%	5,00%	100,00%
25	1,37%	36,99%	3,70%	100,00%
28	4,11%	43,84%	9,38%	33,33%

Exemples

Chen 28 : $(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x^2-15$ p

D3 $ax-(b+cx)-(dx+e)=-ax(b+cx)-(dx+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 5 utilisations pour 5 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	6,85%	52,05%	13,16%	20,00%

Exemples

Jega 19 : $9x - (-4 + 5x) - (5x + 10) = 36x + 45x^2 - 5x + 10 = 31x + 45x^2 + 10$

D4 $ax + (bx - c) - (-dx + e) = ax + bx - ax - c + dx - e$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 3 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	2,74%	42,47%	6,45%	100,00%
19	1,37%	52,05%	2,63%	0,00%

D5 $(ax + b) - (cx + d) = (ax - cx) + (ax - d) + (b - cx) + (b - d)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

D6 $(a + bx)(cx - d) = acx - bcx^2 - bdx$; a=1, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
28	1,37%	43,84%	3,13%	100,00%

D7 $ax - (-b + cx) - (cx + d) = ax - (-b) + cx - ax + cx + ax + d$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	1,37%	52,05%	2,63%	100,00%

D8 $ax - (-b + cx) - (cx + d) = ax + b + ax - cx + cx - d$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	1,37%	52,05%	2,63%	100,00%

D9 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + (b + d)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	100,00%

D10 $(ax + b)(cx + d) = (acx + ad)(bcx + bd)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

D11 $(ax + b)(cx + d) = (acx^2)(bd)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

D12 $ax(b + cx) = axb * acx^2$; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
22	1,37%	35,62%	3,85%	100,00%
28	1,37%	43,84%	3,13%	0,00%

D13 $a(bx + c) = a + bc + ac$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

D14 $(ax+b)(cx+d)=acx+adx+b-cd+bd$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
13	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

D15 $ax+(bx+c)=abx^2+acx$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

D16 $ax+(bx+c)+(dx+e)=(ax+bx)+(ax+c)+(ax+dx)+(ax+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

D17 $a+(bx+c)+(dx+e)=(a+bx)+(a+c)+(dx+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

D18 $(ax+b)+(cx+d)=(ax+b)(cx+d)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

Règles sur les signes

S1 $-a(-b)=-ab$; a, b entiers + , pour les exercices 4, 7, b facteur de x: 22 utilisations pour 16 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
2	6,85%	23,29%	29,41%	80,00%
4	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%
5	4,11%	6,85%	60,00%	100,00%
7	4,11%	42,47%	9,68%	33,33%
17	10,96%	38,36%	28,57%	12,50%
25	2,74%	36,99%	7,41%	50,00%

Exemples :

Ches 2 : $(-3-6)*(6-8)=-9*(-2)=-18$

Ches 5 : $(-2)*(-5)*3+(-2)*(-4)=30+(-8)=22$

Pomm 17 : $-9*(-2)-7*(-6+2)=-18-42-14=-74$

S2 $a(-b)=a-b$; a, b entiers + : 7 utilisations pour 6 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	8,22%	42,47%	19,35%	16,67%
22	1,37%	35,62%	3,85%	0,00%

Exemples

Weng 4 : $7x+(2x-8)-(-3x+12)=7x+2x-8-3x-12=6x-20$

S3 $-(a+bx)-(bx+c)-a-bx+bx-c=-a-c$; a, c entiers + ou -, b entier + (prétexte pour annuler les bx) : 5 utilisations pour 5 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	6,85%	52,05%	13,16%	100,00%

Exemples

Weng 19 : $9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x-4-5x+5x-10=9x-14$ p

S4 $-(a+bx)-(bx+c)=a-c$; a, b, c entiers + (prétexte pour annuler les bx) : 3 utilisations pour 3 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	4,11%	52,05%	7,89%	66,67%

Exemples

Dodi 19 : $9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x+4+5x-5x+10=9x+6$ p

S5 $-a(-b+c)=-ab+ac$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
17	1,37%	38,36%	3,57%	0,00%

S6 $a(-b)=ab$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
17	1,37%	38,36%	3,57%	0,00%

S7 $ax(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx)-(cx+d)$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	1,37%	52,05%	2,63%	100,00%

S8 $(ax-b)-(-cx+d)=ax-b-cx+d$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

S9 $ax(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx-cx+d)$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	1,37%	52,05%	2,63%	100,00%

S10 $(ax+b)-(-cx+d)=-ax-b-cx-d$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
4	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

S11 $-a(-bx-b)=abx-ab$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

S12 $(-a-b)(c-d)=-ac+ad+bd+bc$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
2	1,37%	23,29%	5,88%	0,00%

Règles d'élimination du coefficient de x dans la résolution d'équations

Ed1 $ax=b \Rightarrow x=b-a$; a, b entiers + ou - : 28 utilisations pour 16 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
8	9,59%	12,33%	77,78%	71,43%
10	6,85%	16,44%	41,67%	100,00%
15	4,11%	34,25%	12,00%	66,67%
20	1,37%	6,85%	20,00%	100,00%
26	8,22%	42,47%	19,35%	100,00%
29	4,11%	54,79%	7,50%	66,67%
31	2,74%	42,47%	6,45%	50,00%

Exemples :

Dani 8 : $4x=16$ $x=16-4$ $x=12$

Duva 10 : $5x=9$ $x=9-5$ $x=4$

Scog 15 : $8x-4=3x-2$ $8x-3x=4-2$ $5x=2$ $x=-3$

Hure 20 : $5x=25$ $x=-5+25$ $x=20$

Conq 26 : $-8=-7x+5$ $x=-8+7-5$ $x=-6$

Jous 29 : $-2x+8=3+2x$ $-2x-2x=-8+3$ $-4x=-5$ $x=4-5$ $x=-1$

Ed2 $ax=b \Rightarrow x=a/b$; a, b entiers + ou - : 19 utilisations pour 12 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
8	1,37%	12,33%	11,11%	100,00%
10	1,37%	16,44%	8,33%	100,00%
15	9,59%	34,25%	28,00%	85,71%
20	2,74%	6,85%	40,00%	100,00%
26	4,11%	42,47%	9,68%	100,00%
29	4,11%	54,79%	7,50%	66,67%
31	2,74%	42,47%	6,45%	0,00%

Exemples : Jose

Exercice 8 : $4x=14$ $x=1/4$

Exercice 10 : $5x=9$ $x=5/9$

Exercice 15 : $8x-4=3x-2$ $x=5/2$

Exercice 20 : $5x=25$ $x=5/25$ $x=1/5$

Exercice 26 : $-8=-7x+5$ $x=7/13$

Exercice 29 : $-2x+8=3+2x$ $4x=5$ $x=4/5$

Ed3 $-ax=-b \Rightarrow x=-b/a$ (a change de signe ?) ; a entier + : 8 utilisations pour 8 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
26	2,74%	42,47%	6,45%	50,00%
29	6,85%	54,79%	12,50%	100,00%
31	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Exemples

Epez 26 : $-8 = -7x + 5$ $-7x = -13$ $x = -13/7$
 Lero 29 : $-2x + 8 = 3 + 2x$ $-4x = -5$ $x = -5/4$

Ed4 $ax = b \Rightarrow x = ab$; a entier + ou -, b fraction + ou - : 8 utilisations pour 8 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
31	10,96%	42,47%	25,81%	100,00%

Exemples

Hele 31 : $7x = 4/5$ $x = 4/5 * 7$ $x = 28/5$

Ed5 $ax = b \Rightarrow x = -b + a$; a, b entiers + ou - : 5 utilisations pour 4 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
10	1,37%	16,44%	8,33%	0,00%
15	5,48%	34,25%	16,00%	50,00%

Exemple : Heui 10 : $5x = 9 - 9 + 5 = x$

Ed6 $x/a = -b \Rightarrow x = ab$ (a change de signe ?) ; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	100,00%
31	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Ed7 $x/a = b \Rightarrow x = a/b$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	2,74%	19,18%	14,29%	100,00%

Ed8 $ax = bx + c \Rightarrow x = (bx + c)/a$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
15	1,37%	34,25%	4,00%	0,00%

Ed9 $x/a = b \Rightarrow x = -b/a$ (a change de signe ?) ; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	100,00%

Ed10 $x/a = b \Rightarrow x = b - a$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	100,00%

Ed11 $x/a = -b \Rightarrow a = -ab$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	0,00%

Ed12 $x/a = b \Rightarrow x = b/-a$ (a change de signe ?) ; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	100,00%

Ed13 $-a=-bx+c \Rightarrow x=-a/(b+c)$ (**b change de signe ?**) ; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
26	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%

Ed14 $ax=b/c \Rightarrow x=ab/ac$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
31	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Ed15 $ax-b=cx-d \Rightarrow x=a/c$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
15	1,37%	34,25%	4,00%	100,00%

Ed16 $ax=b \Rightarrow x=-ab$ (**a change de signe ?**) ; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
10	1,37%	16,44%	8,33%	100,00%

Ed17 $x/a=b \Rightarrow x=b(-a)$ (**a change de signe ?**) ; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
23	1,37%	19,18%	7,14%	100,00%

Ed18 $-a=-bx+c \Rightarrow x=(-a/b)-c$ (**b change de signe ?**) ; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
26	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Règles d'élimination des constantes dans la résolution d'équations

Es1 $a-x=b \Rightarrow x=b-a$; a, b entiers + : 12 utilisations pour 12 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
6	16,44%	31,51%	52,17%	91,67%

Exemple : Cami 6 : $9-x=12 \Rightarrow x=12-9$

Es2 $-ax-ax=0$; a entier + : 13 utilisations pour 12 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
19	6,85%	52,05%	13,16%	20,00%
29	10,96%	54,79%	20,00%	75,00%

Exemple : Sylv 29 : $-2x+8=3+2x \Rightarrow -2x-2x=3-8 \Rightarrow -2x-2x=-5$ impasse p

Es3 $x-a=b \Rightarrow x=-b-a$; a, b entiers + : 8 utilisations pour 8 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
3	1,37%	6,85%	20,00%	100,00%
26	9,59%	42,47%	22,58%	100,00%

Exemple

Houi 26 : $-8=-7x+5$ $-7x=5+8$ $-7x=13$ $x=-7/13$ p

Es4 $-x+a=b \Rightarrow x=b+a$; a, b entiers + : 6 utilisations pour 6 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
6	6,85%	31,51%	21,74%	100,00%
26	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Exemple

Sylv 6 : $9-x=12$ $x=12+9$ $x=21$ p

Es5 $-ax-ax=x$; a entier + : 5 utilisations pour 5 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
7	1,37%	42,47%	3,23%	0,00%
29	5,48%	54,79%	10,00%	75,00%

Exemple

Dema 29 : $-2x+8=3+2x$ $-2x-2x=3-8$ $x=-5$ p

Es6 $-ax=+ax \Rightarrow 0$; a entier + : 4 utilisations pour 4 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
29	5,48%	54,79%	10,00%	50,00%

Exemple

Cami 29 : $-2x+8=3+2x$ $=-5$ impasse p

Es7 $a-x=b \Rightarrow x=-b-a$; a, b entiers + : 4 utilisations pour 4 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
6	5,48%	31,51%	17,39%	100,00%

Exemple

Houi 6 : $9-x=12$ $x=-12-9$ $x=-21$ p

Es8 $a+x=b \Rightarrow x=b-a$; a, b entiers + : 4 utilisations pour 4 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
3	2,74%	6,85%	40,00%	100,00%
18	2,74%	13,70%	20,00%	100,00%

Exemple

Rejo 18 : $10+x=-8$ $x=2$ p

Es9 $x-a=b \Rightarrow x=-b+a$; a, b entiers + : 3 utilisations pour 3 élèves.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
15	2,74%	34,25%	8,00%	100,00%
29	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

Exemple

Gonz 15 : $8x-4=3x-2$ $5x=6$ $x=6/5$

Es10 $x-a=b \Rightarrow x=b-a$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
26	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Es11 $a+x=b \Rightarrow x=b/a$; a, b entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
18	1,37%	13,70%	10,00%	100,00%

Es12 $x+a=-b \Rightarrow x=b+a$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
3	1,37%	6,85%	20,00%	0,00%

Es13 $a+b=x \Rightarrow abx$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
3	1,37%	6,85%	20,00%	0,00%

Es 14 $-a=-bx+c \Rightarrow x=a/b-c$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
26	1,37%	42,47%	3,23%	100,00%

Es15 $-ax=+ax-b \Rightarrow -x+b=x$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
29	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

Es16 $x+a=b \Rightarrow x=-b+a$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 exercice.

exercice	taux d'utilisation	taux d'échec	taux d'util relatif	prédictibilité
29	1,37%	54,79%	2,50%	0,00%

4.2 ANNEXE 2 : liste des exercices pour les trois classes de quatrième d'EXP-Paris, avec détail des contraintes choisies

Equations : $ax+b=cx+d$:

A - $b=c=0$ ($a \in \mathbb{Q}$ et est du type $(1/n)x$)⁸ ($a < 0$)¹⁰ et $d > 0$

- $-\frac{1}{4}x = 6$

B - $b=c=0$ ($a \in \mathbb{Q}$ et est du type $1/x$)⁸ ($a > 0$)¹⁰ et $d > 0$

- $\frac{1}{7}x = 3$

C - $b=c=0$ ($(a > 0)$ ¹⁰ et $d > 0$)² (le facteur de x est à droite)¹¹

- $7 = 28x$

D - $b=c=0$ ($(a < 0)$ ¹⁰ et $d < 0$)²

- $-4x = -27$

E - $((a < 0)$ ¹⁰ (avec $a > 0$ et $c < 0$ $|b| > |a|$) $d < 0$)² ($d < 0$ et $b > 0$)¹ (b précède a et c précède d)³

- $12 - 6x = -15x - 3$

F - $((a < 0)$ ¹⁰ (avec $a > 0$ et $c > 0$ $|b| > |a|$) $d < 0$)² ($d > 0$ et $b < 0$)¹ (a précède b et d précède c)³

- $8x - 11 = 7 + 10x$

G - $(a=0 \ c=-1)$ ⁴ ($d > 0$ et $b > 0$)¹

- $2 = -x + 15$

H - $(a=0 \ c=1)$ ⁴ ($d < 0$ et $b < 0$)¹

- $-9 = x - 7$

I - $(a=-1 \ c=0)$ ⁴ $b > 0$ et $d < 0$ (b précède a)⁵

- $\frac{11-x}{2} = -12$

J - $(a=-1 \ c=1)$ ³⁻¹⁰ $b > 0$ et $d > 0$ (a précède b)⁵

- $-x + 2 = 7 + x$

K - $(|a|=|c| \ (a > 0 \ \text{et} \ c < 0))$ ¹⁰³ $b < 0$ $d < 0$

- $-3 + 2x = -2x - 2$

L - $b=c=0$ ($a \in \mathbb{Q}$ et est du type $m/n \ |m| > |n|$)⁷ ($(a < 0)$ ¹⁰ $d > 0$)⁶

- $-\frac{7}{2}x = 5$

M - $b=c=0$ ($a \in \mathbb{Q}$ et est du type $m/n \ |m| < |n|$)⁷ ($a > 0$)¹⁰ $d > 0$

- $\frac{3}{8}x = 4$

N - $b=c=0$ ($d \in \mathbb{Q}$ et est du type $m/n \ |m| > |n|$)⁷ $d > 0$ ($a > 0$)¹⁰

- $9x = \frac{27}{2}$

O - $b=c=0$ ($d \in \mathbb{3}$ et est du type $m/n \ |m| > |n|$)⁷ ($d < 0$ ($a < 0$)¹⁰)⁶

- $-11x = -\frac{22}{2}$

¹ pour E $d < 0$ et $b > 0$

pour F $d > 0$ et $b < 0$

pour G $d > 0$ et $b > 0$

pour H $d < 0$ et $b < 0$

Vise à étudier les règles de mouvement de constantes entières.

² pour C $b=c=0$, $a>0$ et $d>0$
 pour D $b=c=0$, $a<0$ et $d<0$
 pour E $a-c>0$ (avec $a>0$ et $c<0$ $|b|>|a|$) $d-b<0$, soit équivalent de $b=c=0$, $a>0$ $d<0$
 pour F $a-c<0$ (avec $a>0$ et $c>0$ $|b|>|a|$) $d-b>0$, soit équivalent de $b=c=0$, $a<0$ $d>0$
 Vise à étudier les règles de passages impliquant des signes différents.

³ pour K $|a|=|c|$ et $a>0$ et $c<0$
 pour J $a=-1$ $c=1$, cas particulier $|a|=|c|$ et $a<0$ et $c>0$
 Nous renseigne sur le comportement de l'élève face à des facteurs de x de valeurs absolues identiques mais de signes différents de chaque côté du signe.

⁴ pour G $a=0$ $c=-1$
 pour H $a=0$ $c=1$
 pour I $a=-1$ $c=0$
 Nous renseigne sur le comportement de l'élève dans la résolution d'équations de type $x+a=b$, en fonction l'emplacement et du signe de x .

⁵ pour I b précède a
 pour J a précède b
 Nous renseigne sur le comportement de l'élève en fonction de l'emplacement respectif de l'inconnue et de la constante.

⁶ pour L $a<0$ $d>0$
 pour O $d<0$ $a<0$
 Nous renseigne sur le comportement de l'élève associé aux signes dans une équation du type : $ax=b$ ou a et b sont soit >0 soit <0 et soit une fraction soit un entier.

⁷ pour L $a \in \mathbb{Q}$ et est du type m/n $|m|>|n|$
 pour M $a \in \mathbb{Q}$ et est du type m/n $|m|<|n|$
 pour N $d \in \mathbb{Q}$ et est du type m/n $|m|>|n|$
 pour O $d \in \mathbb{Q}$ et est du type m/n $|m|>|n|$
 Règles sur les fractions dans les différents contextes possibles.

⁸ pour A $a \in \mathbb{Q}$ et est du type $(1/n)x$
 pour B $a \in \mathbb{Q}$ et est du type $1/x$
 Identification des règles propres à un numérateur de 1 sur un coefficient fractionnaire de l'inconnu

⁹ pour E b précède a et c précède d
 pour F a précède b et d précède c
 Influence des positions relatives et constantes et des coefficients.

¹⁰ Effet du signe de a .

¹¹ Influence de l'emplacement à gauche ou à droite du signe = pour l'inconnu.

Afin de ne pas rendre trop évidente l'isomorphie entre les 15 exercices tests, nous avons alterné avec des exercices de remplissage, qui étaient d'autres problèmes d'algèbre, mais qui ne concernaient pas la résolution d'équations du premier degré.

Ordre des exercices :

4 ordres de passation ont été construits de manière à limiter les biais systématiques liés à des effets d'apprentissages ou à des baisses du niveau attentionnel.

4.3 ANNEXE 3 : Utilisation des règles élève par élève

	règles/échecs	prédictible/échecs	prédictibilité	calcul	inachevé	impasse
beck	62,50%	37,50%	60,00%	37,50%	25,00%	6,25%
bert	40,00%	40,00%	100,00%	13,33%	26,67%	13,33%
beri	42,86%	42,86%	100,00%	7,14%	0,00%	50,00%
bong	50,00%	36,36%	72,73%	27,27%	31,82%	13,64%
dasi	65,22%	52,17%	80,00%	30,43%	17,39%	4,35%
dupo	55,17%	17,24%	31,25%	37,93%	20,69%	0,00%
frac	75,00%	75,00%	100,00%	25,00%	0,00%	0,00%
frey	78,57%	78,57%	100,00%	7,14%	14,29%	0,00%
greg	66,67%	51,85%	77,78%	22,22%	29,63%	0,00%
gued	68,00%	40,00%	58,82%	48,00%	4,00%	4,00%
guen	68,75%	62,50%	90,91%	25,00%	18,75%	6,25%
hach	60,00%	48,00%	80,00%	8,00%	24,00%	20,00%
hamm	66,67%	66,67%	100,00%	22,22%	22,22%	0,00%
hard	33,33%	20,00%	60,00%	46,67%	40,00%	0,00%
huet	71,43%	47,62%	66,67%	19,05%	14,29%	14,29%
jovi	75,68%	54,05%	71,43%	27,03%	16,22%	0,00%
kach	59,26%	51,85%	87,50%	22,22%	7,41%	7,41%
lanq	29,27%	24,39%	83,33%	19,51%	9,76%	4,88%
made	47,83%	21,74%	45,45%	30,43%	30,43%	26,09%
maza	29,17%	16,67%	57,14%	12,50%	0,00%	25,00%
nadj	70,00%	35,00%	50,00%	30,00%	30,00%	10,00%
nian	59,26%	29,63%	50,00%	51,85%	29,63%	0,00%
nico	40,00%	28,57%	71,43%	28,57%	34,29%	11,43%
roll	15,38%	15,38%	100,00%	76,92%	15,38%	0,00%
saha	48,89%	48,89%	100,00%	8,89%	13,33%	0,00%
saua	55,56%	33,33%	60,00%	27,78%	27,78%	22,22%
serv	40,00%	13,33%	33,33%	80,00%	13,33%	0,00%
soph	63,64%	22,73%	35,71%	40,91%	9,09%	22,73%
verg	62,50%	37,50%	60,00%	50,00%	12,50%	0,00%
wand	70,59%	58,82%	83,33%	23,53%	35,29%	0,00%
beau	56,52%	34,78%	61,54%	34,78%	8,70%	13,04%
bell	63,64%	59,09%	92,86%	22,73%	4,55%	18,18%
bern	65,38%	46,15%	70,59%	11,54%	11,54%	19,23%
bers	13,33%	0,00%	0,00%	26,67%	40,00%	53,33%
blei	58,33%	33,33%	57,14%	25,00%	8,33%	20,83%
bles	70,00%	40,00%	57,14%	0,00%	50,00%	0,00%
buss	77,27%	40,91%	52,94%	22,73%	9,09%	0,00%
cano	48,65%	27,03%	55,56%	21,62%	48,65%	10,81%
chau	73,68%	47,37%	64,29%	26,32%	10,53%	5,26%
chav	81,08%	43,24%	53,33%	21,62%	21,62%	5,41%
ched	72,22%	50,00%	69,23%	16,67%	33,33%	0,00%
chev	76,19%	61,90%	81,25%	19,05%	9,52%	4,76%
clau	84,00%	44,00%	52,38%	12,00%	36,00%	4,00%
dewa	80,00%	32,00%	40,00%	12,00%	8,00%	16,00%
ducr	72,73%	72,73%	100,00%	0,00%	27,27%	9,09%
fran	50,00%	50,00%	100,00%	33,33%	22,22%	0,00%
friz	68,29%	14,63%	21,43%	29,27%	29,27%	19,51%
guil	64,86%	32,43%	50,00%	27,03%	27,03%	0,00%
hutc	42,31%	15,38%	36,36%	23,08%	15,38%	30,77%
magn	48,89%	22,22%	45,45%	31,11%	26,67%	8,89%
mare	41,67%	33,33%	80,00%	25,00%	20,83%	25,00%
maum	68,97%	27,59%	40,00%	34,48%	6,90%	0,00%

migu	44,44%	33,33%	75,00%	25,93%	18,52%	22,22%
mira	55,00%	35,00%	63,64%	40,00%	5,00%	20,00%
more	34,62%	19,23%	55,56%	11,54%	15,38%	53,85%
prin	42,86%	23,81%	55,56%	23,81%	9,52%	33,33%
sall	39,29%	10,71%	27,27%	14,29%	28,57%	42,86%
sauï	36,67%	23,33%	63,64%	13,33%	16,67%	43,33%
soro	55,17%	41,38%	75,00%	34,48%	20,69%	0,00%
yata	69,23%	69,23%	100,00%	15,38%	30,77%	0,00%
alex	57,14%	57,14%	100,00%	28,57%	0,00%	0,00%
aoun	40,00%	20,00%	50,00%	15,00%	15,00%	0,00%
beat	78,26%	56,52%	72,22%	43,48%	13,04%	4,35%
benk	0,00%	0,00%		100,00%	0,00%	0,00%
borg	51,85%	44,44%	85,71%	29,63%	29,63%	0,00%
boub	43,48%	43,48%	100,00%	52,17%	17,39%	0,00%
camp	40,91%	22,73%	55,56%	59,09%	22,73%	0,00%
carl	75,00%	18,75%	25,00%	31,25%	56,25%	0,00%
cava	40,00%	32,00%	80,00%	32,00%	48,00%	0,00%
doub	81,82%	81,82%	100,00%	9,09%	0,00%	0,00%
gueg	80,00%	40,00%	50,00%	24,00%	24,00%	8,00%
hain	57,14%	45,71%	80,00%	45,71%	17,14%	0,00%
jovt	53,33%	53,33%	100,00%	40,00%	26,67%	0,00%
lafo	60,87%	60,87%	100,00%	17,39%	17,39%	0,00%
lega	61,54%	23,08%	37,50%	26,92%	11,54%	15,38%
leve	86,67%	60,00%	69,23%	26,67%	13,33%	6,67%
luli	43,90%	19,51%	44,44%	24,39%	24,39%	29,27%
mard	69,23%	53,85%	77,78%	0,00%	46,15%	0,00%
mara	50,00%	50,00%	100,00%	35,71%	21,43%	0,00%
mena	70,00%	45,00%	64,29%	20,00%	5,00%	20,00%
mett	50,00%	50,00%	100,00%	50,00%	0,00%	0,00%
moni	76,92%	53,85%	70,00%	23,08%	7,69%	7,69%
ouiz	70,59%	47,06%	66,67%	35,29%	11,76%	0,00%
piff	76,47%	47,06%	61,54%	17,65%	5,88%	5,88%
port	52,63%	31,58%	60,00%	42,11%	21,05%	0,00%
prad	25,00%	25,00%	100,00%	50,00%	0,00%	25,00%
sain	57,14%	40,82%	71,43%	12,24%	20,41%	24,49%
vell	57,14%	28,57%	50,00%	57,14%	28,57%	0,00%
vict	82,35%	47,06%	57,14%	23,53%	47,06%	0,00%
yaud	71,43%	28,57%	40,00%	57,14%	14,29%	14,29%

4.4 ANNEXE 4 : Stabilité des règles des règles élève par élève

	stable	moy stable	non stable	total
beck	1	2	3	6
bert			1	1
beri	1	1		2
bong	2	1	1	4
dasi		4	1	5
dupo		4		4
frac			3	3
frey		3	1	4
greg	1	2	1	4
gued		3	1	4
guen		2	3	5
hach		3	2	5
hamm		1		1
hard			1	1
huet		3	2	5
jovi	1	3	1	5
kach		1	3	4
lanq	1	2	1	4
made	1	2	3	6
maza		2	2	4
nadj	1	2	3	6
nian		1	3	4
nico	1	1	2	4
roll			1	1
saha		2	5	7
saua		1	4	5
serv			1	1
soph		2	4	6
verg		1	1	2
wand		1	1	2
beau	1	2		3
bell	1	1	3	5
bern	1	2	4	7
bers			1	1
blei		4	2	6
bles	1	1		2
buss	1	4	1	6
cano		2	2	4
chau	1	3	1	5
chav		2		2
ched		1	2	3
chev	3	2	3	8
clau	1	5		6
dewa	2	4		6
ducr		2	1	3
fran	1	2	2	5
friz	1	2	2	5
guil	2	2	3	7
hutc		3	2	5
magn	1	1	2	4
mare		3	2	5

maum		3	1	4
migu	1	2	1	4
mira		3	1	4
more	1	1	1	3
prin		2	2	4
sall		3	1	4
sau		3	3	6
soro		2		2
yata	2	1	1	4
alex		1		1
aoun		1	4	5
beat	1	3	3	7
benk				0
borg		1	1	2
boub		1	1	2
camp		1	2	3
carl	2	1	1	4
cava		2	2	4
doub	1	2	3	6
gueg		2	1	3
hain		2	5	7
jovt	1	1		2
lafo	1	1	3	5
lega	3	3	1	7
leve	1	1	2	4
luli		2	2	4
mard	1	2	1	4
mara		1	3	4
mena		4	3	7
mett			2	2
moni	1		2	3
ouiz			2	2
piff	2	3		5
port		2	1	3
prad			2	2
sain	1	3	1	5
vell			2	2
vict		2	2	4
yaud		2	1	3
total	46	162	152	360
indices ligne	0,13	0,45	0,42	
indices collo	0,27	0,51	0,51	

4.5 ANNEXE 5 : comparaison des règles produites par les deux analystes

Règles sur les puissances

	<i>Analyse 1</i> <i>Production de règles sur papier</i>	<i>Analyse 2</i> <i>Règles correspondantes implantées</i>
P1 Exemples	$ax(bx)=abx$; a, b entiers + ou - : 64 utilisations pour 30 élèves	ER_Perte_carre_Produit2facteurs ER_Perte_carre_Produit4facteurs ER_PerteCarre_Dvt ER_PerteCarre_Dvt2
	$3x*2x = 6x$ $(4x)(3x) = 12x$ $7x(3x+5)=21x+7x*5$ $(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x-15x$	Contexte plus précis.
P2 Exemples	$ax^2+bx=(a+b)x$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves	ER_degré1_plus_degré2_donne_degré1
	$5x^2+3x-7-3x^2+2x+8 = 8x-3x^2+2x+1$	
P3 Exemples	$ax^2=a^2x$; a, b entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves	ER_Positifx^n_Donne_Positif^nx ER_Negatifx^n_Donne_Negatif^nx
	$-3x^2 = -9x$ $-3x^2 = 9x$	
P4 Exemples	$x+x=x^2$; 2 utilisations pour 2 élèves	ER_SommeDegreMonomeCoefIdentique ER_a+b_Donne_ab
	$5x+5x = 5x^2$ $x+x = x*x = x^2$	Plus général : $ax+ax = ax^2$ ou $ax+bx = abx^2$
P5 Exemples	$ax^2+bx^2=(a+b)x^4$ 1 utilisation pour 1 élève	ER_DegréhPlusDegrek_donne_DegréhPlusk
	$10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=16x-9x^4$	Plus général : $ax^h+bx^k = (a+b)x^{h+k}$
P6 Exemples	$ax^2+ax=ax^3$; a entier + ou - 1 utilisation pour 1 élève.	ER_SommeDegreMonomeCoefIdentique
	$10x+1-6x^2+5-3x^2+6x-6=10x-6x^3-3x^2$	Plus général : $ax^h+ax^k = ax^{h+k}$
P9 Exemples	$ax^2+bx=(a+b)x^2$; a,b entier + ou - 1 utilisation pour 1 élève.	ER_degré1_plus_degré2_donne_degré2
	$6x^2+5x=11x^2$	
P10 Exemples	$ax^2+b=(a+b)x^2$; a, b entiers + ou - 1 utilisation pour 1 élève	ER_constant_plus_variable_donne_variable
	$10x-3=7x$	Plus général : $ax^h+b = (a+b)x^h$

Règles implantées sans règles papier associées

		Règles implantées
P11		ER_constant_plus_variable_donne_constant
Exemples	$10x-3=7$	$ax^h+b = a+b$
P12		ER_SommeDegreMonome
Exemples	$10x-6x^2-3x^2+6x=7x$	Tous les x sont comptés dans l'expression de départ et les coefficients additionnés.
P13		ER_a^n_Donne_na
Exemples		$x^n = 3x$
P14		ER_Perte_Carre_Somme
Exemples		$ax^2+bx^2 = (a+b)x$
P15		ER_Pertex_Red
Exemples		$ax^2-ax \rightarrow ax-a$
P16		ER_Pertex_Dans_x^2
Exemples		$ax^2 \rightarrow a^2$
P17		ER_DifferenceMonomesIdDonneX
Exemples		$ax-ax \rightarrow x$
P18		ER_DifferenceMonomesIdDonneMoinsX
Exemples		$ax-ax \rightarrow -x$
P19		ER_DifferenceMonomesIdDegreNDonneX^N
Exemples		$ax^n-ax^n \rightarrow x^n$
P20		ER_2NegatifsIdDonne-1
Exemples		$-a-a \rightarrow -1$
P21		ER_a^n^p
Exemples		$(a^n)^p \rightarrow a^{(n+p)}$
P22		ER_a^2p+1
Exemples		$(-a)^n \rightarrow a^n, n \text{ impair}$
P23		ER_a^2p
Exemples		$(-a)^n \rightarrow -a^n, n \text{ pair}$

Il y a aussi 12 règles implantées dites erreurs faibles de perte d'argument, de signe etc.

Règles papier non implantées

P24 Exemples	$ax+bx^3=(a+b)x$; a, b entiers + ou - 1 utilisation pour 1 élève	
	$10x-3x^3=7x$	
P25 Exemples	$ax^3+bx^2=(a+b)x^3$; a, b entiers + ou - 1 utilisation pour 1 élève	
	$10x-6x^3-3x^2=10x-3x^3$	

Règles de priorité des opérations

	<i>Analyse 1 Production de règles sur papier</i>	<i>Analyse 2 Règles correspondantes implantées</i>
O1 Exemples	$-(ax+b)=-ax+b$ a, b entiers + ou - : 36 utilisations pour 22 élèves.	ER_Moins_Fois_1erDeSomme ER_SupprParenthesesBrute
	$7x+(2x-8)-(-3x+12)=9x-x+10x+19x$ $-9*(-2)-7*(-6+2)=18-42+14$	
O2 Exemples	$a-bc=(a-b)c$; a, b entiers +, c entier + ou facteur de x ou facteur entre parenthèses : 28 utilisations pour 19 élèves.	ER_SoustractionPrioritaireParentheses
	$2-3(-5x-5) = -1(-5x-5)$	Plus restrictive : c doit être entre parenthèses
O3	$a+bc=(a+b)c$; a, b entiers +, c facteur de x : 4 utilisations pour 3 élèves.	ER_AdditionPrioritaireParentheses
		c doit être entre parenthèses
O4	$(ax+b)(cx+d)=ax+bcx+d$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	ER_SupprParenthesesBrute
		Plus général

Règles implantées sans règles papier associées

O5		ER_SoustractionPrioritaire
		$ab-b = a$

Règles papier non implantées

Pour beaucoup de règles qui suivent, elles apparaîtront, dans l'implantation dans les règles de factorisation (des signes) :

O6 $a-b-c=a-(b+c)$; a, b, c entiers + : 14 utilisations pour 14 élèves

O7 $a+(b+c)-(d+e)=a+(b+c-d+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - ou facteurs de x + ou -

O8 $a-bc=a*(-bc)$; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 2 élèves.

O9 $a-b+c=a-(b+c)$; a, b, c entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

O10 $abc+de=ab+cde$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

O11 $ax(-bx)=ax-bx$; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

O12 $(ax-b)-(-cx+d)=(ax-b)(-(-cx+d))$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

Règles de factorisation

Règles implantées sans règles papier associées

Règles de distribution

	<i>Analyse 1 Production de règles sur papier</i>	<i>Analyse 2 Règles correspondantes implantées</i>
D1 Exemple	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$; a, b,c,d entiers + ou - : 53 utilisations pour 41 élèves.	GEN_somme_fois_somme
	$(-3-6)*(6-8)=-18+24-36+48$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
D2 Exemple	$(a+bx)(cx+d)=acx+ad+bcx^2+bd$; a, b, c, d entiers + ou - : 6 utilisations pour 6 élèves.	ER_Pertex_Dvt ER_Pertex_Dvt2
	$(1+5x)(2x-3)=2x-3+10x^2-15$	a peut être nul
D5 Exemple	$(ax+b)-(cx+d)=(ax-cx)+(ax-d)+(b-cx)+(b-d)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	ER_somme_moins_somme ER_terme_moins_somme
D6 Exemple	$a+(bx+c)+(dx+e)=(a+bx)+(a+c)+(dx+e)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.	ER_terme_plus_somme
		Plus général : fonctionne pour a entier ou monôme $a + (bx+c) = (a+bx)+(a+c)$

Règles implantées sans règles papier associées

D7 Exemple		ER_somme_plus_somme
		$(a+b)+(c+d) = (a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)$
D8 Exemple		ER_a_Fois1erDeSomme ER_moins_a_Fois1erDeSomme ER_SuppressionbrutedeParenthese
		$a(b+c) = ab+c$
D9 Exemple		ER_a_Fois2ndDeSomme ER_moins_a_Fois2ndDeSomme
		$a(b+c) = b+ac$
D10 Exemple		ER_Pertex_Dans_x^2Dvt ER_Pertex_Dans_x^2Dvt2
	$7x(3x+5) = 21x^2+35x$ $(2x+1)(3x+5) = 6x^2+10x+3x+5$	$(ax+b)(cx+d) = (ac)^2+adx+bcx+bd$ b peut être nul
D11 Exemple		ER_PerteCarre_Dvt ER_PerteCarre_Dvt2
	$7x(3x+5) = 21x+35x$ $(2x+1)(3x+5) = 6x+10x+3x+5$	$(ax+b)(cx+d) = acx+adx+bcx+bd$ b peut être nul

Règles papier non implantées

- D12 $ax-(b+cx)-(dx+e)=-ax(b+cx)-(dx+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 5 utilisations pour 5 élèves.
 D13 $ax+(bx-c)-(-dx+e)=ax+bx-ax-c+dx-e$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 3 utilisations pour 2 élèves.
 D14 $ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax-(-b)+cx-ax+cx+ax+d$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.
 D15 $ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax+b+ax-cx+cx-d$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève
 D16 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+adx+bcx+(b+d)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D17 $(ax+b)(cx+d)=(acx^2)(bd)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D18 $ax(b+cx)=axb*acx^2$; a, b, c entiers + ou - : 2 utilisations pour 1 élève.
 D19 $a(bx+c)=a+bc+ac$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D20 $(ax+b)(cx+d)=acx+adx+b-cd+bd$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.
 D21 $ax+(bx+c)+(dx+e)=(ax+bx)+(ax+c)+(ax+dx)+(ax+e)$; a, b, c, d, e entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D22 $(ax+b)(cx+d)=(acx+ad)(bcx+bd)$; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D23 $(ax+b)+(cx+d)=(ax+b)(cx+d)$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D24 $ax+(bx+c)=abx^2+acx$; a, b, c entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.
 D25 $(1+bx)(cx-d)=cx-bcx^2-bdx$; a=1, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

Règles sur les signes

	<i>Analyse 1 Production de règles sur papier</i>	<i>Analyse 2 Règles correspondantes implantées</i>
S1	$-(a+bx)-(bx+c)=-a-bx+bx-c=-a-c$; a, b, c, d entiers + ou - : 5 utilisations pour 5 élèves.	ER_2TermesNegatifsDonneNul ER_2TermesNegatifsDonneNul_DansSomme ER_2TermesPositifsDonneNul_DansSomme
Exemple	$9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x-4-5x+5x-10$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
S2	$-(a+bx)-(bx+c)=-a-c$ a, b, c entiers + : 3 utilisations pour 3 élèves.	ER_2TermesNegatifsDonneNul ER_2TermesNegatifsDonneNul_DansSomme ER_2TermesPositifsDonneNul_DansSomme
Exemple	$9x-(-4+5x)-(5x+10)=9x+4+5x-5x+10$	Pas de distinction : a constant ou monôme.
S3	$-a(-b+c)=-ab+ac$; $-a(-bx-b)=abx-ab$; a, b, c entiers + : 2 utilisation pour 2 élèves	ER_Moins_Fois2ndDeSomme ER_Moins_Fois1erDeSomme ER_Moins_Fois2ndSomme_Coefficient ER_Moins_Fois1erSomme_Coefficient
S4	$ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx)-(cx+d)$ $(ax-b)-(-cx+d)=ax-b-cx+d$; a, b, c, d entiers + : 2 utilisation pour 2 élèves.	ER_Moins_FoisAucunDeSomme
		Plus général : $-(a+b) = a+b$
S5	$ax-(-b+cx)-(cx+d)=ax+(-b+cx-cx+d)$; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.	ER_Moins_FoisAucunDeSomme combiné avec ER_Moins_Fois1erDeSomme

Règles implantées sans règles papier associées

S6		ER_Moins_FoisNbNegatifsDeSomme (resp. ER_Moins_FoisNbPositifsDeSomme)
		Le moins devant une parenthèse n'est distribué que sur les nombres négatifs (respectivement positifs)
S7		ER_OubliSigneMoins
	$7x-x = 8x$	$a-b = a+b$
S8		ER_AjoutSigneMoins
	$-5x+2x = -7x$	$-a+b = -a-b$
S9		ER_InversionSigneSomme ER_InversionSigneResultat
	$7x-x+3x = -9x$	$a+b = -a-b$

Règles papier non implantées

S10 **$-a(-b)=-ab$** ; a, b entiers + , pour les exercices 4, 7, b facteur de x: 22 utilisations pour 16 élèves.

S11 **$a(-b)=a-b$** ; a, b entiers + : 7 utilisations pour 6 élèves.

S12 **$a(-b)=ab$** ; a, b entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

S13 **$(ax+b)-(-cx+d)=-ax-b-cx-d$** ; a, b, c, d entiers + ou - : 1 utilisation pour 1 élève.

S14 **$(-a-b)(c-d)=-ac+ad+bd+bc$** ; a, b, c, d entiers + : 1 utilisation pour 1 élève.

Règles d'élimination du coefficient de x dans la résolution d'équations

Ces règles ont été implantées sous la forme de la règle de mouvement.

Règles d'élimination des constantes dans la résolution d'équations

Ces règles ont été implantées sous la forme de la règle de mouvement.

4.6 ANNEXE 6 : tableau des conceptions diagnostiquées pour l'ensemble des 3186 élèves

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1							Brésil			France Seconde				France Troisième			France Quatrième								
2							% E	% C	TOT	% E	Totau x	BRA1	BRA2	% E	Totau x	Exp93	Exp92 Secon	Secon de Mvt	% E	Totau x	Paris 3'	Exp92 3'	% E	Totau x	Paris 4'
3	Effectifs								3186		2503	1125	1378		402	181	194	27		192	69	123		89	89
4	Signe dans Mouvement	SigneCorrect					8,1	2,7	258	5,9	147	118	29	17,7	71	31	19	21	7,8	15	3	12	28,1	25	25
5		SigneCorrect-eq					15,7	5,3	500	18,4	460	350	110	10,0	40	40	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
6		SigneCorrect-ineq					3,7	1,3	119	3,8	94	30	64	6,2	25	4	0	21	0,0	0	0	0	0,0	0	0
7		ChangementSigne-add					22,8	7,6	726	25,4	636	326	310	22,4	90	69	17	4	0,0	0	0	0	0,0	0	0
8		ConservationSigne-mult					0,6	0,2	18	0,7	17	15	2	0,2	1	1	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
9		ChangementSigne-eq-add					21,3	7,2	679	20,1	502	228	274	17,9	72	20	52	0	43,2	83	53	30	24,7	22	22
10		ChangementSigne-ineq-add					4,8	1,6	153	5,4	136	17	119	4,2	17	12	5	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
11		ConservationSigne-eq-mult					2,5	0,8	79	2,6	65	41	24	1,7	7	3	4	0	1,0	2	1	1	5,6	5	5
12		ConservationSigne-ineq-mult					0,2	0,1	7	0,3	7	3	4	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
13		ValeurAbsolue					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
14		ValeurAbsolue-eq					0,0	0,0	1	0,0	1	0	1	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
15		ValeurAbsolue-add					0,1	0,0	3	0,1	3	1	2	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
16		ValeurAbsolue-mult					0,6	0,2	20	0,8	19	6	13	0,2	1	0	0	1	0,0	0	0	0	0,0	0	0
17		ValeurAbsolue-eq-add					1,9	0,6	61	2,3	57	24	33	0,2	1	1	0	0	0,5	1	0	1	2,2	2	2
18		ValeurAbsolue-ineq-add					1,8	0,6	56	2,2	54	22	32	0,5	2	2	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
19		ValeurAbsolue-eq-mult					0,5	0,2	17	0,4	11	1	10	0,0	0	0	0	0	0,5	1	1	0	5,6	5	5
20		ValeurAbsolue-ineq-mult					1,9	0,6	61	2,3	57	31	26	1,0	4	4	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
21		ValeurAbsoluePartielleM					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
22		ValeurAbsoluePartielleM-eq					4,2	1,4	134	4,5	113	42	71	0,5	2	0	1	1	0,0	0	0	0	21,3	19	19
23		ConservationSigne					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
24		ConservationSigne-add					0,3	0,1	8	0,3	8	4	4	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
25		ConservationSigne-eq-add					0,5	0,2	16	0,6	15	0	15	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	1,1	1	1
26		ConservationSigne-ineq-add					0,6	0,2	18	0,7	18	0	18	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
27		ChangementSigne					0,0	0,0	1	0,0	1	0	1	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
28		ChangementSigne-eq					0,2	0,1	7	0,2	5	0	5	0,2	1	0	1	0	0,0	0	0	0	1,1	1	1
29		ChangementSigne-ineq					0,0	0,0	1	0,0	1	0	1	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
30		Opérateur dans Mouvement	OpérateurCorrect					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0
31	ConservationOpérateur-add					56,8	19,1	1810	62,6	1566	796	770	60,7	244	146	72	26	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
32	ConservationOpérateur-eq-add					33,1	11,1	1056	27,3	684	306	378	33,1	133	28	105	0	78,1	150	69	81	100,0	89	89	
33	ConservationOpérateur-ineq-add					2,4	0,8	78	3,1	77	0	77	0,2	1	1	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	
34	OpérateurCorrect-mult-num					33,1	11,1	1056	35,8	897	520	377	39,6	159	110	24	25	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
35	OpérateurCorrect-eq-mult-num					34,9	11,7	1111	32,5	814	434	380	37,1	149	46	103	0	56,3	108	58	50	44,9	40	40	
36	OpérateurCorrect-ineq-mult-num					4,0	1,3	127	4,8	119	10	109	2,0	8	7	1	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
37	ConservationOpérateur					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
38	ConservationOpérateur-eq-mult					0,4	0,1	13	0,4	10	4	6	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	3,4	3	3	
39	ConservationOpérateur-ineq-mult					0,2	0,1	5	0,2	5	1	4	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
40	OpérateurUnifieA					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
41	OpérateurUnifieA-eq-mult-num					2,1	0,7	68	1,8	45	10	35	0,7	3	1	2	0	3,6	7	2	5	14,6	13	13	
42	OpérateurUnifieA-ineq-mult-num					0,9	0,3	28	1,1	28	12	16	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
43	OpérateurUnifieMD					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
44	OpérateurUnifieMD-eq-add					0,1	0,0	2	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	1,0	2	0	2	0,0	0	0	
45	OpérateurUnifieMD-ineq-add					0,0	0,0	1	0	1	1	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	
46	Sens	ConservationSens					6,5	2,2	206	7,5	187	82	105	4,7	19	8	0	11	0,0	0	0	0	0,0	0	0
47		ConservationSens-add					30,3	10,2	966	33,1	828	420	408	34,3	138	102	22	14	0,0	0	0	0	0,0	0	0
48		ConservationSens-mult					0,8	0,3	24	0,9	22	11	11	0,5	2	2	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
49		ChangementSens					0,0	0,0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0
50	ConservationSens-mult					0,1	0,0	2	0,0	0	0	0	0,0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0	0	0	

Les Cahiers Leibniz

Le **Laboratoire Leibniz** est fortement pluridisciplinaire. Son activité scientifique couvre un large domaine qui comprend des thèmes fondamentaux aussi bien en informatique qu'en mathématiques, avec une ouverture sur l'apprentissage machine, la modélisation de systèmes complexes adaptatifs, et les applications aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain.

Les **Cahiers Leibniz** ont pour vocation la diffusion de rapports de recherche, de supports de cours, de textes de séminaires ou de projets de publications réalisés par des membres du laboratoire. Ils peuvent accueillir aussi des textes de chercheurs n'appartenant pas au laboratoire Leibniz mais qui travaillent sur des thèmes proches et ne disposent pas de tels supports de publication. Ces chercheurs sont priés de contacter un des membres du comité éditorial ; le comité décidera de l'acceptation du texte proposé.

Le contenu des textes publiés dans les **Cahiers Leibniz** relève de la seule responsabilité de leurs auteurs.

The research at **Laboratoire Leibniz** is multidisciplinary. It covers a large domain of fundamental and applied subjects in informatics and mathematics, with openings to machine learning, the modelisation of adaptive complex systems, and applications to teaching software.

The **Cahiers Leibniz** aim at diffusing research reports, lectures, and texts of conferences or pre-prints of the members of the laboratory. Moreover, the **Cahiers** welcome manuscripts of researchers belonging to other laboratories, working on subjects close to ours, but not disposing of such a medium. These researchers should contact one of the members of the editorial board; the latter will decide whether to accept the proposal.

The responsibility of the contents of the **Cahiers** lies exclusively with the authors.

Comité éditorial

Mirta B. Gordon (responsable), Annie Bessot, Gerd Finke, Humbert Fiorino, Denise Grenier, Philippe Jorrand, Andras Sëbo

Directeur de la publication

Nicolas Balacheff

Réalisation : Jacky Coutin

ISSN : 1298-020X - © laboratoire Leibniz

